

Florian Weißel

Stochastische modell-prädiktive
Regelung nichtlinearer Systeme



Florian Weißel

Stochastische modell-prädiktive Regelung nichtlinearer Systeme

Karlsruhe Series on Intelligent Sensor-Actuator-Systems

Volume 2

ISAS | Universität Karlsruhe (TH)

Intelligent Sensor-Actuator-Systems Laboratory

Edited by Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck

Stochastische modell-prädiktive Regelung nichtlinearer Systeme

von
Florian Weißel



universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)

Fakultät für Informatik, Tag der mündlichen Prüfung: 14.11.2008

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2009
Print on Demand

ISSN: 1867-3813

ISBN: 978-3-86644-348-8

Stochastische modell-prädiktive Regelung nichtlinearer Systeme

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Informatik
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

Dissertation

von

Florian Weißel

aus Stade

Tag der mündlichen Prüfung: 14.11.2008

Erster Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck

Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Christoph Stiller

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS) der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Professor Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck möchte ich für die Initiierung und Betreuung der Arbeit sowie die ausgezeichnete Arbeitsbedingung danken. Herrn Professor Dr.-Ing. Christoph Stiller danke ich für die Übernahme des Korreferats und sein großes Interesse an der Thematik der vorliegenden Arbeit.

Besonderen Dank möchte ich meinen ehemaligen Kollegen am ISAS aussprechen. Zum einen haben die vielen fachlichen Diskussionen, insbesondere mit Frederik Beutler, Dietrich Brunn, Oliver Schrempf und vor allem mit meinem Zimmerkollegen Marco Huber im erheblichen Maße zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Zum anderen werde ich das freundschaftliche Verhältnis im gesamten Team und die vielen schönen Stunden, die wir miteinander verbracht haben, immer in guter Erinnerung behalten. Mein aufrichtiger Dank gilt auch dem technischen Personal, hier insbesondere Hans Merkle und Wolfgang Rihm, die mich mit viel Enthusiasmus beim Bau der Laufroboter unterstützt haben.

Dank sagen möchte ich allen meinen Diplomanden, Studienarbeitern, wissenschaftlichen Hilfskräften und Praktikanten für die freundschaftliche Zusammenarbeit sowie die tatkräftige Unterstützung. Ohne ihr großes Interesse an der Thematik und ihre engagierte Mitarbeit wäre die Dissertation in dieser Form nicht möglich gewesen. Mein besonderer Dank gilt hier Christof Chlebek, Marc Deisenroth, Farhad Omid sowie Thomas Schreiter.

Judith Hartmann, Achim Hekler, Marco Huber und Stefan Kiesel möchte ich für die sorgfältige Durchsicht und Korrektur dieser Arbeit danken.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden, die mir während meiner Promotion ein ständiger Rückhalt waren und mich begleitet haben. Vor allem möchte ich aber meiner lieben Judith für ihr Verständnis, ihre Unterstützung und ihre Motivation danken.

Für Judith

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	V
Abkürzungen	VII
Notation	IX
Zusammenfassung	XI
1 Einleitung	1
2 Betrachtetes Problem	5
2.1 System- und Messmodell	6
2.2 Gütefunktion	8
2.3 Modell-prädiktive Regelung	9
2.4 MPC ohne Berücksichtigung stochastischer Unsicherheiten	10
2.5 Stochastische MPC	12
2.5.1 Open-Loop-Feedback-SNMPC	13
2.5.2 Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen	14
2.5.3 Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen	16
3 Stand der Technik	19
3.1 NMPC ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten	20
3.2 SNMPC bei diskreten und linearen Systemen	20
3.2.1 Systeme mit diskreten Zuständen und Stellgrößen	20
3.2.2 Lineare Systemmodelle	21
3.3 SNMPC bei nichtlinearen Systemen mit kontinuierlichwertigen Zuständen	22

3.3.1	Zeitkontinuierliche Systemmodelle	22
3.3.2	Zeitdiskrete Systemmodelle mit wertkontinuierlichen Stellgrößen	22
3.3.3	Zeitdiskrete Systemmodelle mit diskreten Stellgrößen	23
3.3.4	Zeitdiskrete Systemmodelle mit nicht direkt zugänglichen Zuständen	24
4	Open-Loop-Feedback-SNMPC	25
4.1	Prädiktion des Systemzustands	25
4.1.1	Approximation der Transitionsdichte mittels Gaußfunktionen	28
4.1.2	Approximation der Transitionsdichte mittels hybrider Dichten	30
4.1.3	Komplexitätsreduktion: Modularisierung	32
4.2	Gütefunktionsmodellierung zur effizienten Berechenbarkeit	34
4.2.1	Polynomielle Schrittgüte	35
4.2.2	Stückweise polynomielle Schrittgüte	36
4.2.3	Gaußmischschrittgüte	38
4.2.4	Diracmischschrittgüte	39
4.2.5	Schrittgüte auf Basis weiterer Momente	41
4.2.6	Kombination der Verfahren	41
4.3	Effiziente Auswertung des Suchbaums	42
4.3.1	Rekursive Berechnung	42
4.3.2	Uniform-Cost-Search	43
	Zusammenfassung der Verfahren für die OLF-SNMPC	45
5	Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen	47
5.1	Berechnung mittels dynamischer Programmierung	47
5.2	Gütefunktionsapproximation bei Gaußmischtransitionsdichten	49
5.2.1	Berechnung der stellwertabhängigen Gütefunktion	49
5.2.2	Maximierung	51
5.3	Gütefunktionsapproximation bei hybriden Transitionsdichten	52
5.3.1	Berechnung der stellwertabhängigen Gütefunktion	53
5.3.2	Maximierung	53
5.3.3	Interpolation der Gütefunktion	54

5.4	Aufwandsabschätzung	56
	Zusammenfassung der Verfahren zur CLF-P-SNMPC	57
6	Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen	59
6.1	Bayes'sche Zustandsschätzung	59
6.1.1	Verwendete Filterverfahren	61
6.2	Stellwertberechnung unter Berücksichtigung verrauschter Messungen	62
6.2.1	Das Prinzip der virtuellen Messungen	64
6.2.2	Rekursive Berechnung	66
6.3	Methoden zur effizienten Berechnung	69
6.3.1	Erwartungswertbasierte stellgrößenabhängige Schrittgüten	69
6.3.2	Probabilistisches Branch-and-Bound	72
	Zusammenfassung der Verfahren zur CLF-I-SNMPC	76
7	Simulationen und Experimente	79
7.1	Berücksichtigung von Systemunsicherheiten bei der Lageregelung	79
7.1.1	Simulationen	79
7.1.2	Experimente	83
7.2	Berücksichtigung von System- und Messunsicherheiten bei der Bahnplanung	86
	Zusammenfassung der Simulationen und Experimente	89
8	Zusammenfassung und Ausblick	91
A	Laufroboter	95
A.1	Bewegungsmuster	95
A.2	Kinematisches Modell	97
A.3	Technische Realisierung	99
A.4	Testumgebung	100
A.4.1	Kamerabasierte Positionsmessung und Sensoremulation	101
A.4.2	High-Level Steuerung	101
A.4.3	Simulations-Engine	102
A.4.4	Grafische Benutzerschnittstelle (GUI)	102

B Sensoreinsatzplanung	103
B.1 Robotervorauswahl	104
B.2 Auswahl eines Landmarkenroboters	104
C Berechnung stückweise polynomieller Gütefunktionen	107
D Erwartungswert einer gaußverteilten Zufallsvariable transformiert mit sinc	109
Literaturverzeichnis	113

Abbildungsverzeichnis

2.1	Miniaturisierter Laufroboter.	6
2.2	Beispielszenario A: Roboter vor Wand.	7
2.3	Exemplarische Zustandstrajektorie bei deterministischer NMPC.	10
2.4	Deterministisch geregeltes System.	11
2.5	Stochastisch geregeltes System.	13
2.6	Systemmodell für Open-Loop-Feedback-Regelung.	14
2.7	Systemmodell für Closed-Loop-Feedback-Regelung mit direkt zugänglichen Zuständen.	15
2.8	Systemmodell für Closed-Loop-Feedback-Regelung mit nicht direkt zugänglichen Zuständen.	17
4.1	Zustandsdichten bei OLF.	26
4.2	Transitionsdichte des Systems $a(\mathbf{x}_{n+1}) = \sin(\mathbf{x}_n) + \mathbf{w}_n$	27
4.3	Transitionsdichtenapproximation durch Gaußmischdichte.	28
4.4	Transitionsdichtenapproximation durch hybride Dichte.	31
4.5	Modularisierung.	33
4.6	Polynomielle Gütefunktionen.	36
4.7	Gaußmisch- und Diracmischgütefunktionen.	40
4.8	Suchbaum OLF.	42
5.1	Rekursive Berechnung der Gütefunktion bei dynamischer Programmierung. . . .	49
5.2	Ideale Tiefpassinterpolation.	57
6.1	Rekursiver Bayes'scher Schätzer.	60
6.2	Suchbaum CLF-I.	63

6.3	Suchbaum CLF-I: Diskretisierte virtuelle Messung.	64
6.4	Diracmischapproximation einer virtuellen Messungsdichte.	65
6.5	Berechnung der Güte $J_n^e(\underline{\boldsymbol{x}}_n^e)$	66
6.6	Berechnung der Güte $J_n^p(\underline{\boldsymbol{x}}_n^p)$	67
6.7	CLF-I Suchbaum mit gewichteten Kanten.	68
6.8	Optimaler Suchbaum unter Verwendung von PBAB.	75
6.9	Optimaler Suchbaum unter Verwendung von PBAB bei erwartungswertbasierter stellgrößenabhängiger Schrittgröße.	76
7.1	Gütefunktion \hat{g}_n bestehend aus der Summe einer Gaußfunktion und einem stück- weise konstanten Anteil.	80
7.2	Beispielszenario A: Simulationslauf bei Messrauschen mit kleiner Kovarianz . . .	81
7.3	Beispielszenario A: Simulationslauf bei Messrauschen mit großer Kovarianz . . .	82
7.4	Experiment zu Beispielszenario A.	83
7.5	Beispielszenario A: Experimentallauf mit OLF-SNMPC- bzw. CEC-NMPC-Regelung.	84
7.6	Beispielszenario B: Umgebung mit Hindernissen	87
7.7	Beispielszenario B: Simulationsläufe mit primärer Landmarke zur Abstandsmes- sung	88
A.1	Miniaturisierter Laufroboter.	96
A.2	CAD-Modell des Roboters.	96
A.3	Vorwärtsschritt des Roboters.	97
A.4	Drehung des Roboters.	98
A.5	CAD-Modell des Roboters in Explosionsansicht.	99
A.6	Draufsicht des Roboters.	100
A.7	Systemübersicht der Roboter-Testumgebung	101
A.8	Roboter in der Testumgebung.	102
D.1	Erwartungswert einer sinc-transformierten gaußverteilten Zufallsvariable.	111

Abkürzungen

BAB	Branch-and-Bound
CEC	Certainty-Equivalent-Controller
CLF-I	Closed-Loop-Feedback, imperfect state information
CLF-P	Closed-Loop-Feedback, perfect state information
DP	Dynamische Programmierung
EKF	Extended Kalman-Filter
FIFO	First in - First out
LIFO	Last in - First out
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LQR	Linear Quadratic Regulator
MDP	Markov-Decision-Process
MPC	Modell-prädiktive Regelung
NMPC	Nichtlineare modell-prädiktive Regelung
OLF	Open-Loop-Feedback
PBAB	Probabilistisches Branch-and-Bound
POMDP	Partially Observable Markov-Decision-Process
SNMPC	Stochastische nichtlineare modell-prädiktive Regelung
UKF	Unscented Kalman-Filter
UCS	Uniform-Cost-Search

Notation

Konventionen

x	Skalar
x_k	Skalar zum Zeitpunkt k
\underline{x}	Spaltenvektor (unterstrichen)
\underline{x}^\top	Zeilenvektor
\mathbf{C}	Matrix (Großbuchstabe, fett)
\mathbf{C}^\top	Transponierte von \mathbf{C}
\mathbf{x}	Zufallsvariable (Kleinbuchstabe, fett)
$\mathbf{x}_{k,n}$	Zufallsvariable zum Zeitschritt n eines Prädiktionshorizonts, wobei $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k,0}$ den Ausgangszustand darstellt
$\mathbf{x}_{k,1:3}$	Folge von Zufallsvariablen $\{\mathbf{x}_{k,1}, \mathbf{x}_{k,2}, \mathbf{x}_{k,3}\}$
$E\{\cdot\}$	Erwartungswertoperator
\sim	Verteilungsoperator $\mathbf{x} \sim f(x)$ bedeutet, dass \mathbf{x} gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ verteilt ist.
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
■	Ende eines Beispiels
□	Ende eines Beweises

Symbole

\underline{u}_k^*	optimale Stellgröße
\underline{x}_k	Systemzustand
\hat{z}_k	Gemessener Wert
$\mathbf{x}_{k,n}^p \sim f_{k,n}^p(\underline{x}_{k,n})$	Zufallsvariable des prädizierten Systemzustands
$\mathbf{x}_{k,n}^e \sim f_{k,n}^e(\underline{x}_{k,n})$	Zufallsvariable des geschätzten Systemzustands (nach Filterschritt)
$g_{k,n}(\underline{x}_{k,n}, \underline{u}_{k,n})$	reellwertige Schrittgröße
$\hat{g}_{k,n}(\underline{x}_{k,n}, \underline{u}_{k,n})$	Schrittgröße-Gewichtungsfunktion
$J_k(\underline{x}_k)$	kumulierte Güte (Abhängig von Systemzustand)
$V_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$	kumulierte Güte (Abhängig von Systemzustand und Stellgröße)

Funktionssymbole

$\delta(x)$	Diracdistribution
$\mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}, \mathbf{C})$	Normalverteilung mit Mittelwert $\underline{\mu}$ und Kovarianzmatrix \mathbf{C}
$\text{erf}(\underline{x})$	Gauß'sche Fehlerfunktion
$\text{spur}(\mathbf{C})$	Summe der Hauptdiagonalelemente der Matrix \mathbf{C}
$\text{diag}(\underline{c})$	Diagonalmatrix mit Hauptdiagonalelementen \underline{c}

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Verfahren zur Regelung nichtlinearer Systeme unter umfassender Berücksichtigung stochastischer Unsicherheiten vorgestellt, wobei insbesondere Systeme mit kontinuierlichwertigen Zuständen und diskreten Stellgrößen betrachtet werden. Zur Stellwertbestimmung werden Techniken der modell-prädiktiven Regelung (MPC) verwendet. Bei der MPC wird das Systemverhalten stellgrößenabhängig innerhalb eines endlichen Horizontes prädiziert und mittels einer Gütefunktion bewertet. Auf Basis dieses Gütemaßes wird der optimale Stellwert ausgewählt, welcher dann zur eigentlichen Regelung verwendet wird.

Im Falle nichtlinearer Systeme sowie nichtquadratischer Gütefunktionen hat sowohl das Systemrauschen als auch die Zugänglichkeit der Zustandsgrößen einen erheblichen Einfluss auf die Wahl der optimalen Stellwerte. Das in dieser Arbeit vorgestellte Framework zur stochastischen nichtlinearen modell-prädiktiven Regelung (SNMPC) berücksichtigt daher sowohl explizit den Einfluss des Systemrauschens als auch die Zugänglichkeit der Zustandsgrößen, wobei bezüglich der Zustandszugänglichkeit drei relevante Fälle unterschieden werden können. Bei der Open-Loop-Feedback-SNMPC (OLF-SNMPC) wird der Zustand innerhalb des betrachteten Prädiktionshorizonts als nicht zugänglich modelliert, d. h. die Bestimmung der Stellwerte erfolgt unter der Annahme, dass keine Zustandsrückführung vorliegt. Bei der Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen (perfect state information, CLF-P-SNMPC) wird innerhalb des betrachteten Horizonts von einer direkten Zustandsrückführung ausgegangen. Im dritten Fall, dem Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen (imperfect state information, CLF-I-SNMPC) wird bei der Stellwertbestimmung davon ausgegangen, dass innerhalb des betrachteten Horizonts lediglich eine stochastische Schätzung des Zustands unter Berücksichtigung des Messsystems und der verschiedenen Rauscheinflüsse vorliegt.

Da die sich ergebenden nichtkonvexen stochastischen Optimierungsprobleme, welche unter anderem die nichtlineare stochastische Prädiktion, die nichtlineare stochastische Filterung, sowie die probabilistische Auswertung von Gütefunktionen umfassen, im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar sind, werden in dieser Arbeit insbesondere approximative Lösungen vorgestellt. Diese basieren auf einer Kombination der nichtlinearen stochastischen Zustandsschätzung mittels Approximation der Systemtransitionsdichte mit einer speziellen Modellierung der Gütemaße auf Basis verschiedener Funktionsklassen, wie klassischen polynomiellen Gütefunktionen aber auch Gaußmischgütefunktionen. Die Kombination dieser Techniken gestattet die effiziente probabilistische Auswertung der Gütefunktionen in geschlossener Form.

Die OLF-SNMPC stellt den einfachsten betrachteten Fall dar, da hier die Stellwertberechnung direkt durch Auswahl der optimalen Stellwerte auf Basis stellwertabhängig-prädizierter Gütemaße erfolgen kann. Dies kann mit den hier eingesetzten Verfahren

zur Prädiktion und probabilistischen Auswertung der Gütefunktionen in geschlossener Form erfolgen. Ferner wird die Erweiterung um ein effizientes Verfahren zur Baumsuche beschrieben, was zu einer zusätzlichen Effizienzsteigerung führt.

Beim zweiten betrachteten Fall, der CLF-P-SNMPC, kann die Berechnung der Stellwerte mittels dynamischer Programmierung erfolgen. Hierzu werden Verfahren vorgestellt, welche wiederum auf Approximation der Systemtransitionsdichte basieren und welche durch Approximation sowie Interpolation der kumulativen Gütefunktionen der dynamischen Programmierung eine besonders effiziente Stellwertberechnung gestatten. Bei zeitinvarianten System- und Gütefunktionen kann durch eine Vorberechnung der kumulativen Gütefunktion die Effizienz noch deutlich gesteigert werden.

Zur Stellwertberechnung bei der CLF-I-SNMPC wird ein Verfahren vorgestellt, welches das rekursive Vorgehen bei der Bayes'schen Zustandsschätzung nachempfunden. Hierzu ist es nötig, so genannte virtuelle Messungen einzuführen, welche die zu erwartenden Messwerte repräsentieren. Hierzu werden zunächst Wahrscheinlichkeitsdichten der zu erwartenden Messwerte bestimmt, auf Basis derer dann gütemaßbasiert möglichst repräsentative virtuelle Messungen generiert werden. Zur Erhöhung der Effizienz wird außerdem ein Verfahren, welches eine probabilistische Erweiterung des Branch-and-Bound Algorithmus darstellt, zur effizienten Auswertung des Suchbaumes beschrieben.

Die in dieser Arbeit vorgestellten SNMPC-Verfahren werden anhand der stochastischen Lageregelung sowie der stochastischen modellbasierten Bahnplanung für Laufroboter evaluiert, wobei die hierzu eingesetzten miniaturisierten Laufroboter mit sechs unabhängigen Freiheitsgraden ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden.

KAPITEL 1

Einleitung

Für viele technische Systeme, sei es im Bereich Robotik oder aber auch der chemischen Prozessindustrie, ist eine qualitativ hochwertige, vorausschauende Regelung von großer Bedeutung. Mit Methoden der modell-prädiktiven Regelung (MPC)¹ kann diesem Anspruch Rechnung getragen werden, da bei der MPC im Gegensatz zu klassischen Regelungsverfahren nicht nur der gegenwärtige Systemzustand, sondern auch dessen prädiziertes stellwertabhängiges Verhalten innerhalb eines Prädiktionshorizonts betrachtet wird. Das gewünschte Systemverhalten kann bei der modell-prädiktiven Regelung mittels einer Gütefunktion² beschrieben werden, welche Systemzustände sowie Stellgrößen bewertet. Das prädizierte Systemverhalten wird basierend auf einem Modell des Systems, also der Regelstrecke, abhängig von den Stellwerten am Systemeingang bestimmt. Auf Grundlage dieses prädizierten Verhaltens werden dann gemäß der Gütefunktion für den betrachteten Prädiktionshorizont die optimalen Stellwerte berechnet, d. h. ein entsprechendes Optimierungsproblem gelöst.

Die Qualität der erzielbaren Regelung hängt bei der modell-prädiktiven Regelung entscheidend von der Qualität des verwendeten Systemmodells und der Gütefunktion ab. Bei der klassischen *linearen* modell-prädiktiven Regelung werden lineare bzw. linearisierte Systemmodelle mit quadratischen Gütefunktionen verwendet. Dies führt zu konvexen Optimierungsproblemen, die, falls keine Beschränkung des Zustands- und Eingangsraums vorliegt, geschlossen gelöst werden können und die im Falle von linearen Beschränkungen auch ausschließlich über ein globales Optimum verfügen. Bei der linearen modell-prädiktiven Regelung handelt es sich um ein recht etabliertes und in weiten Teilen gut verstandenes Regelungskonzept, das vor allem in der petrochemischen Industrie breite Anwendung findet [QB97].

Da die meisten technischen Systeme, wie z. B. die Kinematik mobiler Roboter, nur unzureichend mit linearen Modellen beschrieben werden können, führt die lineare Modellierung zu einer suboptimalen Regelung. Eine Verbesserung der Regelungsqualität kann durch Verwendung nichtlinearer Systemmodelle erreicht werden, da somit die sonst notwendigen Linearisierungen entfallen. Bei vielen praktischen Problemen ist nicht nur die Beschreibung durch lineare Systemmodelle, sondern auch die Verwendung quadratischer Gütefunktionen unzureichend. Ist z. B.

¹ engl.: model predictive control (MPC)

² engl.: reward function

bei einem System die Abweichung vom Sollzustand in eine Richtung ungünstiger als in eine andere oder sollen bei der Roboterbahnplanung geeignete und weniger geeignete Wege mittels der Gütefunktion modelliert werden, kann dies nicht mit hinreichender Qualität durch eine einfache quadratische Gütefunktion dargestellt werden. Durch Verwendung nichtquadratischer Gütefunktionen kann hier die Modellierungsfreiheit und somit die Regelungsqualität deutlich verbessert werden. Verfahren, bei denen nichtlineare Systemmodelle sowie unter Umständen auch nichtquadratische Gütefunktionen Anwendung finden, werden als *nichtlineare* modell-prädiktiven Regelung (NMPC)³ bezeichnet. Die Verwendung nichtlinearer Systemmodelle und/oder nichtquadratischer Gütefunktionen führt in der Regel zu einer erheblichen Vergrößerung des benötigten Berechnungsaufwands, da die sich ergebenden Optimierungsprobleme in der Regel nicht geschlossen lösbar sind und oft auch nicht über eine konvexe Struktur verfügen.

Auch die Verwendung nichtlinearer Modelle erlaubt nicht die *vollständige* Modellierung aller relevanten auftretenden Phänomene. Dies ist entweder darin begründet, dass deren Modellierung zu komplex wäre oder aber ihr Verhalten oft gar nicht oder zumindest nicht im Voraus bekannt ist. Z. B. kann bei einem mobilen Roboter oft zwar ein recht gutes nichtlineares kinematisches Modell gefunden werden, Effekte wie Schlupf können aber in der Regel nicht vollständig modelliert werden. Zum einen wäre deren Modellierung sehr komplex, oft deutlich komplexer als das eigentliche kinematische Modell, zum anderen können Effekte wie unterschiedliche Bodenbeschaffenheit im Voraus oft gar nicht bestimmt werden. Solche nicht direkt modellierbaren Effekte können durch Systemunsicherheiten, also Rauschterme, effektive Berücksichtigung finden. Hierbei ist zu beachten, dass insbesondere bei nichtlinearen Systemfunktionen oder nichtquadratischen Gütefunktionen das Systemrauschen einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Regelung hat, das optimale Regelgesetz unter Berücksichtigung des Rauschens sich also von dem ohne Berücksichtigung des Rauschens unterscheidet. Werden nicht nur Nichtlinearitäten sondern auch stochastische Unsicherheiten bei der modell-prädiktiven Regelung berücksichtigt, wird diese als *stochastische* nichtlineare modell-prädiktiven Regelung (SNMPC)⁴ bezeichnet.

Neben dem Systemrauschen, welches zu einem nicht deterministischen Verlauf des Systemzustands führt, ist bei vielen technischen Systemen der zu regelnde Systemzustand nicht direkt zugänglich und kann nur basierend auf verrauschten Messungen geschätzt werden. Die dann notwendige Zustandsschätzung kann mittels eines stochastischen Schätzers unter Berücksichtigung stochastischer Mess- und Systemunsicherheiten sowie eines Mess- und eines Systemmodells erfolgen. Bei klassischer Vorgehensweise werden diese stochastischen Informationen bei der eigentlichen Regelung dann aber typischerweise nicht berücksichtigt, sondern es wird lediglich der Erwartungswert des geschätzten Zustands als gegenwärtiger Systemzustand angenommen. Darüber hinaus wird normalerweise auch innerhalb des Prädiktionshorizontes die eingeschränkte Zugänglichkeit des Zustands nicht mitberücksichtigt. Es wird entweder davon ausgegangen, dass der Zustand direkt oder aber gar nicht zugänglich ist. Da die Zugänglichkeit des Systemzustands aber einen unter Umständen erheblichen Einfluss auf die Qualität der Regelung hat, muss für eine optimale Bestimmung der Stellgröße neben dem stochastischen Systemverhalten

³ engl.: nonlinear model predictive control (NMPC)

⁴ engl.: stochastic nonlinear model predictive control (SNMPC)

auch die stochastische Zustandsschätzung und somit neben dem stochastischen Systemmodell auch das stochastische Messmodell Berücksichtigung finden.

Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit werden Verfahren zur stochastischen nichtlinearen modell-prädiktiven Regelung für Systeme mit kontinuierlichen Zuständen und diskreten Stellgrößen beschrieben. Da die sich ergebenden nichtlinearen stochastischen Optimierungsprobleme, welche unter anderem die nichtlineare stochastische Prädiktion, die nichtlineare stochastische Filterung, die nichtkonvexe Optimierung und die stochastische Auswertung von Gütefunktionen umfassen, im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar sind, liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit in der Betrachtung approximativer Lösungen.

Im Kapitel 2 wird zunächst eine formale Problemformulierung gegeben, wobei hier zunächst die betrachtete Klasse von Systemen und Messsystemen (Abschnitt 2.1) sowie Gütefunktionen (Abschnitt 2.2) beschrieben wird. Darauf folgt eine kurze Beschreibung der Vorgehensweise der modell-prädiktiven Regelung (Abschnitt 2.3) sowie eine Abgrenzung der MPC ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten (Abschnitt 2.4) und den unterschiedlichen betrachteten Klassen von SNMPC-Problemen (Abschnitt 2.5). Relevante verwandte Arbeiten werden in Kapitel 3 vorgestellt.

In den darauf folgenden drei Kapiteln 4-6 werden dann, als Kern dieser Arbeit, verschiedene Verfahren zur stochastischen nichtlinearen modell-prädiktiven Regelung vorgestellt.

In Kapitel 4 werden Verfahren zur Open-Loop-Feedback-SNMPC vorgestellt. Dazu werden zunächst grundlegende Techniken zur approximativen stochastischen Prädiktion (Abschnitt 4.1) und zur Gütefunktionsmodellierung (Abschnitt 4.2) beschrieben, welche zusammen eine effiziente probabilistische Auswertung der Gütefunktionen ermöglichen. Im Abschnitt 4.3 werden dann Verfahren zur effizienten rekursiven Auswertung des sich ergebenden Suchbaums vorgestellt.

In Kapitel 5 wird die Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen betrachtet. Nach einer Einführung in das Vorgehen zur Berechnung der Stellgrößen mittels dynamischer Programmierung (Abschnitt 5.1) werden zwei Verfahren basierend auf der Transitionsdichtenapproximation mit Gaußmischdichten (Abschnitt 5.2) sowie hybrider Dichten (Abschnitt 5.3) vorgestellt.

Als dritte Klasse von SNMPC-Problemen wird in Kapitel 6 die Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen betrachtet. Da das hier vorgestellte Verfahren zur Stellwertberechnung auf der Bayes'schen Zustandsschätzung basiert, wird diese zunächst in Abschnitt 6.1 kurz eingeführt. In Abschnitt 6.2 wird dann ein Verfahren zur Stellwertberechnung unter Verwendung so genannter virtueller Messungen beschrieben. Ausgehend von diesem Verfahren werden dann in (Abschnitt 6.3) Modifikationen zur Erhöhung der Berechnungseffizienz vorgestellt.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren werden in den Kapiteln durchgehend anhand von Beispielen illustriert. Als Referenzanwendungen dienen hierbei die stochastische Lageregelung

sowie die stochastische modellbasierte Bahnplanung für miniaturisierte Laufroboter. Anhand dieser Referenzanwendungen folgen dann in Kapitel 7 Simulationen und Experimente.

Die Arbeit schließt in Kapitel 8 mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Betrachtetes Problem

In dieser Arbeit werden Methoden zur stochastischen modell-prädiktiven Regelung nichtlinearer Systeme vorgestellt. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt dabei auf Methoden zur effizienten Berechnung möglichst optimaler Stellwerte unter umfassender Berücksichtigung von System- und Messunsicherheiten. Hierzu werden insbesondere speziell angepasste Verfahren aus den Bereichen stochastische Zustandsprädiktion und stochastische Filterung zugrunde gelegt.

Eingesetzt können diese Verfahren überall dort werden, wo technische Systeme mit einem nicht-linearen Systemverhalten bzw. einer nichtquadratischen Gütefunktion unter starkem Rauscheinfluss hochgenau geregelt werden sollen. Zu den möglichen Anwendungsbereichen zählt unter anderem die chemische Prozessindustrie, wo chemische Reaktoren z. B. zur Polymerherstellung oder zum Raffinieren von Metallen hochgenau unter Unsicherheitseinfluss geregelt werden müssen [NGT⁺07, FS07]. Außerdem finden sich Anwendungen in der Luft- und Raumfahrt, wo z. B. die Position von Flugzeugen oder Flugkörpern unter Berücksichtigung von starkem Wind einfluss geregelt werden muss [Bla06, MVL07]. In der Fahrzeugtechnik kann eine Anwendung z. B. in der verbrauchsoptimierten Antriebsstrangregelung von Hybridfahrzeugen bei unbekannt zukünftigen Fahrsituationen [BTK04] liegen. Darüber hinaus ist auch eine Anwendung in besonders innovativen Bereichen, wie der Energiegewinnung bzw. dem Antrieb von Schiffen mittels geregelter Großdrachen [CFM07, Lan08], möglich. In dieser Arbeit wird die Effektivität der vorgestellten Verfahren anhand der Regelung von Laufrobotern gezeigt.

Beispielszenario: Regelung miniaturisierter Laufroboter

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren zur SNMPC-Regelung werden anhand der Bewegungsregelung miniaturisierter Laufroboter (Abb. 2.1) illustriert und bewertet. Details zu diesen Robotern, welche im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind, finden sich in Anhang A. Insbesondere werden in dieser Arbeit zwei konkrete Beispielszenarien zur A: *stochastischen Lageregelung* sowie zur B: *stochastischen Bahnplanung* verwendet. ■

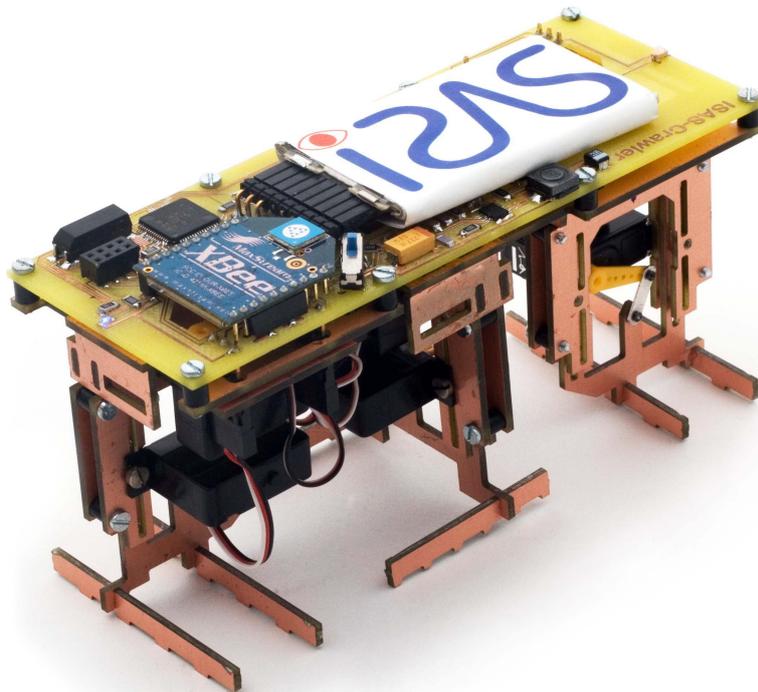


Abbildung 2.1: Miniaturisierter Laufroboter (Länge: 125 mm, Breite: 48 mm, Höhe: 48 mm - 68 mm).

2.1 System- und Messmodell

Die hier betrachteten Systeme, d. h. Regelstrecken, werden als dynamische zeitdiskrete zeitvariante nichtlineare Systeme mit kontinuierlichen Zuständen und diskreten Stellgrößen modelliert. Systemmodelle dieser Klasse können mit einer Systemgleichung der Form

$$\underline{\mathbf{x}}_{k+1} = \underline{a}_k(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{u}_k, \underline{\mathbf{w}}_k) \quad (2.1)$$

beschrieben werden, wobei die durch Zufallsvariablen beschriebenen Systemzustände $\underline{\mathbf{x}}_k$ Werte aus dem kontinuierlichen d^x -dimensionalen Zustandsraum

$$\mathcal{X} = \mathbb{R}^{d^x}$$

und die Stellgrößen \underline{u}_k Werte aus der endlichen Stellgrößenmenge

$$\mathcal{U} = \{\underline{u}^1, \underline{u}^2, \dots, \underline{u}^{|\mathcal{U}|}\}$$

annehmen können. Die stochastischen Unsicherheiten des Systems werden durch einen Rauschterm $\underline{\mathbf{w}}_k$, das Systemrauschen, repräsentiert, wobei dieser im Folgenden als weiß angenommen wird. Die Unsicherheitsbeschreibung von Zuständen und Rauschtermen erfolgt probabilistisch, d. h. die Zufallsvariablen $\underline{\mathbf{x}}_k$ und $\underline{\mathbf{w}}_k$ werden mittels Wahrscheinlichkeitsdichten¹ $f_k(\underline{\mathbf{x}}_k)$ sowie f_k^w beschrieben ($\underline{\mathbf{x}}_k \sim f_k(\underline{\mathbf{x}}_k)$ bzw. $\underline{\mathbf{w}}_k \sim f_k^w(\underline{\mathbf{w}}_k)$). Bei der hier verwendeten Systemdarstellung

¹ engl.: probability density function (PDF)

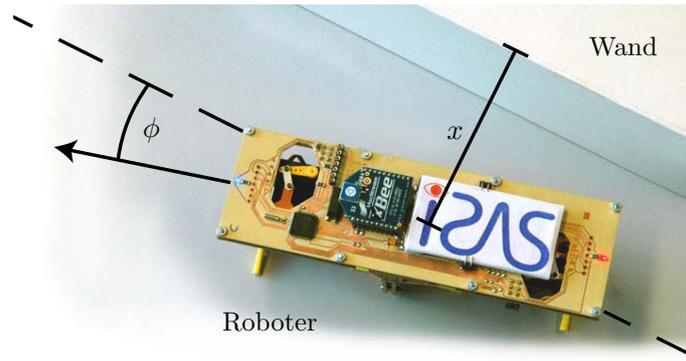


Abbildung 2.2: Beispielszenario A: Roboter bewegt sich im Abstand x mit Winkel ϕ zur Wand.

handelt es sich um einen Markov-Prozess erster Ordnung, d. h. $\underline{x}_{k+1} \sim f_{k+1}(\underline{x}_{k+1})$ und alle weiteren zukünftigen Zustände hängen lediglich vom aktuellen Zustand \underline{x}_k und der Stellgröße \underline{u}_k , nicht aber von vergangenen Zuständen $\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{k-1}$ ab.

Beispielszenario A 2.1: Robotermodell zur Lageregelung

Im Beispielszenario A soll der Roboter mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Trajektorie, z. B. entlang einer Wand geführt werden (Abb. 2.2). Der Roboter wird in einem Modus betrieben, in dem Lenkbewegungen auf die Vorwärtsbewegung superponiert werden können. Die Roboterbewegung kann ähnlich der eines Fahrzeugs mit Differentialantrieb erfolgen, wobei der Systemzustand $\underline{x}_k = [\underline{x}_k, \phi_k]^\top$ den Abstand \underline{x}_k sowie die Ausrichtung ϕ_k des Roboters zur Wand umfasst. Dies führt zu der nichtlinearen zeitdiskreten Systemgleichung

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}_k + s \cdot \sin(\phi_k) + \underline{w}_k^x, \\ \phi_{k+1} &= \phi_k + u_k + \underline{w}_k^\phi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei s die konstante Schrittweite des Roboters und $\underline{w}_k = [\underline{w}_k^x, \underline{w}_k^\phi]^\top$ das Systemrauschen darstellt. Die Stellgröße u_k ist hier eine Lenkbewegung, d. h. eine Richtungsänderung des Roboters. ■

Beispielszenario B 2.1: Robotermodell zur Bahnplanung

Im Beispielszenario B soll der Roboter in einer Umgebung mit Hindernissen unter Berücksichtigung seines nichtlinearen stochastischen Systemmodells eine möglichst geeignete Bahn zu einer Zielregion planen. Hierbei umfasst der die Lage beschreibende Zustand $\underline{x}_k = [\underline{x}_k, \underline{y}_k, \phi_k]^\top$ die Position sowie die Orientierung in der Ebene. Als kinematisches Modell wird das Robotermodell (A.2) verwendet. ■

Der Systemzustand \underline{x}_k ist typischerweise nicht direkt sondern nur indirekt über ein statisches zeitvariantes nichtlineares Messsystem zugänglich. Dieses Messsystem, welches den Zusammenhang zwischen den Zustands- und den Messgrößen beschreibt, kann über eine Messgleichung

der Form

$$\mathbf{z}_k = \underline{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k) \quad (2.3)$$

beschrieben werden, wobei die Messungen \mathbf{z}_k aus dem kontinuierlichen d^z -dimensionalen Raum

$$\mathcal{Z} = \mathbb{R}^{d^z}$$

stammen. Auch im Messsystem werden die stochastischen Unsicherheiten durch einen Rauschterm $\mathbf{v}_k \sim f_k^v$, das Messrauschen, beschrieben, welches ebenso wie das Systemrauschen $\underline{\mathbf{w}}_k$ als weiß angenommen wird.

Beispielszenario B 2.2: Abstandsmessung zu Landmarken

Zur Schätzung der Position des Roboters auf der Ebene kann der Abstand zu Landmarken gemessen werden, was zu der nichtlinearen Messgleichung

$$z_k = \sqrt{(\mathbf{x}_k - \check{x}_k)^2 + (\mathbf{y}_k - \check{y}_k)^2} + \mathbf{v}_k$$

führt, wobei $[\check{x}_k, \check{y}_k]^\top$ die Position der Landmarke ist und das Messrauschen als additiv angenommen wird. Erfolgt die Abstandsmessung nicht zu einer Landmarke, deren Position exakt bekannt ist, sondern z. B. zu einem anderen Roboter, so ergibt sich die Messgleichung

$$z_k = \sqrt{(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{(2)})^2 + (\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k^{(2)})^2} + \mathbf{v}_k ,$$

wobei hier $[\mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{y}_k^{(2)}]^\top$ die Positionsschätzung des zweiten Roboters ist. ■

2.2 Gütefunktion

Eine Folge von prädierten Systemzuständen $\underline{\mathbf{x}}_{k,0:N}$ und zugehöriger Stellwerte $\underline{\mathbf{u}}_{k,0:N-1}$ kann über einen N -schrittigen Optimierungshorizont anhand einer Gütefunktion

$$g(\underline{\mathbf{x}}_{k,0:N}, \underline{\mathbf{u}}_{k,0:N-1})$$

bewertet werden. Der Zeitindex k von $\underline{\mathbf{x}}_{k,n}$ repräsentiert hier den eigentlichen aktuellen Zeitschritt, der zweite Zeitindex $n = 0 \dots N$ den Zeitpunkt innerhalb des Optimierungshorizonts. Hierbei gilt $\underline{\mathbf{x}}_{k,0} = \mathbf{x}_k$. Zeitbereiche werden mit einem Doppelpunkt bezeichnet, also $\underline{\mathbf{x}}_{k,1:3} = \{\mathbf{x}_{k,1}, \mathbf{x}_{k,2}, \mathbf{x}_{k,3}\}$.

Diese Gütefunktion weist den Zuständen und Stellwerten einen skalaren Wert zu. Diese Zuweisung wird im Folgenden auch im stochastischen Sinne gefordert. Wenn es sich bei $\underline{\mathbf{x}}$ um eine Zufallsvariable handelt, kann dies z. B. über eine Erwartungswertbildung geschehen, was zu direkt analogen Ergebnissen mit der deterministischen Definition führt. Weiterhin können aber

auch Maße auf Grundlage anderer Kenngrößen der Zufallsvariablen erfolgen. Soll z. B. die Unsicherheit eines Zustands in die Bewertung mit einfließen, so kann die Spur oder Determinante der Kovarianzmatrix Anwendung finden.

Im Folgenden werden insbesondere über die Zeit *kumulative* Gütefunktionen der Form

$$g_N(\underline{\mathbf{x}}_{k,N}) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{\mathbf{u}}_{k,n}) \quad (2.4)$$

betrachtet, wobei die Schrittgröße $g_n(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{\mathbf{u}}_{k,n})$ vom prädierten Zustand $\underline{\mathbf{x}}_{k,n}$ und von Stellwerten $\underline{\mathbf{u}}_{k,n}$ abhängt und $g_N(\underline{\mathbf{x}}_{k,N})$ ein Terminierungsterm abhängig vom letzten Zustand des Horizonts darstellt. Auch bei Verwendung von über der Zeit kumulativer Gütefunktionen können bei Bedarf durch Augmentierung des Zustandsraums Schrittgrößen realisiert werden, welche sich über mehrere Zeitschritte des ursprünglichen Zustands bzw. der Stellgröße erstrecken.

Bei den Schrittgrößen kann es sich neben einfachen quadratischen Zusammenhängen sehr wohl auch um komplexere Funktionen handeln, die z. B. entstehen, wenn die Abweichung von einem Sollzustand in eine Richtung ungünstiger als in eine andere ist. Ebenfalls entstehen derartige Gütefunktionen z. B. in der Roboterbahnplanung, wenn mittels der Gütefunktion unterschiedlich geeignete Untergründe modelliert werden oder aber die Gütefunktion verwendet wird, um Hindernisse zu modellieren, über die nur unsichere Informationen vorliegen.

2.3 Modell-prädiktive Regelung

Ziel der modell-prädiktiven Regelung (MPC) ist es, eine möglichst geeignete Stellwertsequenz, d. h. Eingangssequenz $\underline{\mathbf{u}}_k^*$, für ein zu regelndes System zu finden. Der Ansatz bei der MPC besteht darin, für das betrachtete System wiederholt eine optimale Stellwertsequenz $\underline{\mathbf{u}}_{k,0:N-1}^*$ über einen N -schrittigen Horizont zu bestimmen. Der Anfang dieser sich ergebenden optimalen Stellwertsequenz $\underline{\mathbf{u}}_{k,0:N-1}^*$, welche die optimale Zustandstrajektorie $\underline{\mathbf{x}}_{k,0:N}^*$ liefert, wird dann zur Regelung des Systems verwendet.

In Abb. 2.3 ist exemplarisch der Ablauf einer modell-prädiktiven Regelung für ein eindimensionales deterministisches System dargestellt. Zur Regelung des Systems kann entweder nur der erste Wert der optimalen Stellwertsequenz $\underline{\mathbf{u}}_{k,0}^*$ oder aber die ersten M Werte $\underline{\mathbf{u}}_{k,0:M-1}^*$ (mit $M < N$) verwendet werden. Zum nächsten Zeitschritt bzw. nach M Zeitschritten wird dann erneut ein optimales Steuerungsproblem über N Schritte gelöst. Somit erfolgt eine Optimierung über einen bewegten Horizont². Wird nur der erste Wert verwendet, führt dies zu den besten Ergebnissen, da in jedem Schritt der aktuelle Zustand (der sich in der Realität in der Regel vom prädierten unterscheidet) als Grundlage für die Regelung verwendet wird. Werden die ersten M Werte verwendet, führt dies zu einer deutlichen Verringerung des Berechnungsaufwandes, die Qualität der Regelung wird aber beeinträchtigt. Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Fall betrachtet, bei dem zu jedem Zeitschritt eine neue Optimierung erfolgt.

² engl.: moving horizon, rolling horizon oder auch receding horizon

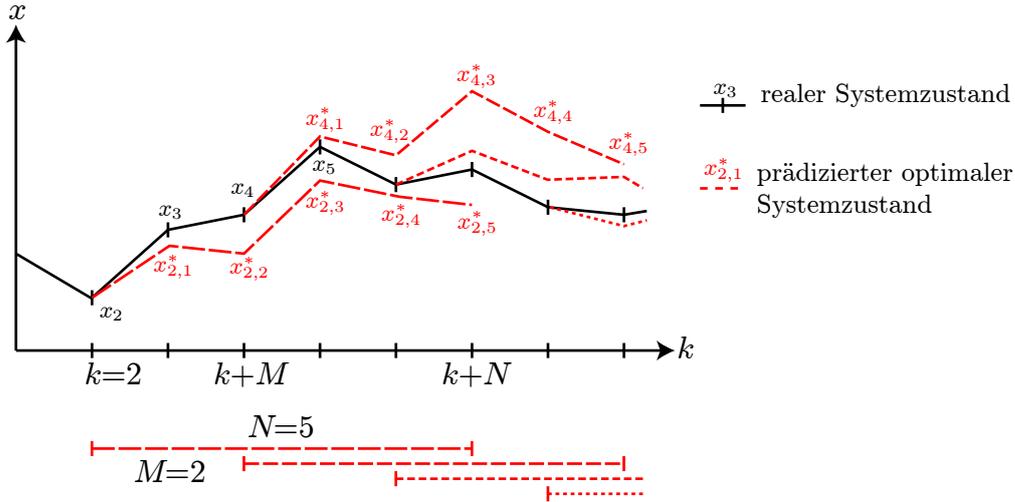


Abbildung 2.3: Exemplarische Zustandstrajektorie bei deterministischer NMPC für einen Prädiktionshorizont der Länge $N = 5$ bei Verwendung der $M = 2$ ersten Werte der optimalen Stellwertsequenz zur Regelung. Die Trajektorie des wahren Systemverlaufs x_k , der jeweils auch Ausgangspunkt der Prädiktion ist, wird mit durchgezogener schwarzer Linie dargestellt, die jeweils optimalen prädizierten Trajektorien $x_{k,n}^*$ mit gestrichelten roten Linien. Unterhalb des Achsenkreuzes sind die Bereiche des bewegten Horizontes ebenfalls in rot dargestellt. Bei der stochastischen NMPC würden sich keine festen prädizierten Werte $x_{k,n}^*$ sondern Zufallsvariablen $\mathbf{x}_{k,n}^*$ mit zugehörigen Wahrscheinlichkeitsdichten $f_{k,n}^*(x_{k,n}^*)$ ergeben.

2.4 MPC ohne Berücksichtigung stochastischer Unsicherheiten

In gegenwärtig eingesetzten MPC-Verfahren werden typischerweise Unsicherheiten des Systems bei der Regelung nicht mitberücksichtigt. Diese Klasse von MPC-Reglern wird auch als *Certainty-Equivalent-Controller* (CEC) [Ber00] bezeichnet, da hier anstelle des stochastischen Systemmodells das entsprechende deterministische³ Modell verwendet wird. Typischerweise handelt es sich hierbei um das stochastische Systemmodell, bei dem das Systemrauschen fest auf dessen Erwartungswert gesetzt wird, wodurch es in ein deterministisches Systemmodell überführt wird. Dieses Vorgehen führt zu dem deterministischen optimalen Steuerungsproblem

$$\underline{u}_k^*(\underline{x}_k) = \arg \max_{\underline{u}_k} \{V_0^{\text{CEC}}(\underline{x}_k, \underline{u}_k)\} \quad ,$$

wobei

$$V_0^{\text{CEC}}(\underline{x}_k, \underline{u}_k) = \max_{\underline{u}_{k,1:N-1}} \left\{ g_N(\underline{x}_{k,N}) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(\underline{x}_{k,n}, \underline{u}_{k,n}) \right\}$$

die vom Zustand \underline{x}_k und der Stellgröße \underline{u}_k abhängige maximale kumulierte CEC-Güte darstellt und ein deterministisches Systemmodell

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{a}_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k)$$

zugrunde gelegt wird.

³ engl.: certainty equivalent

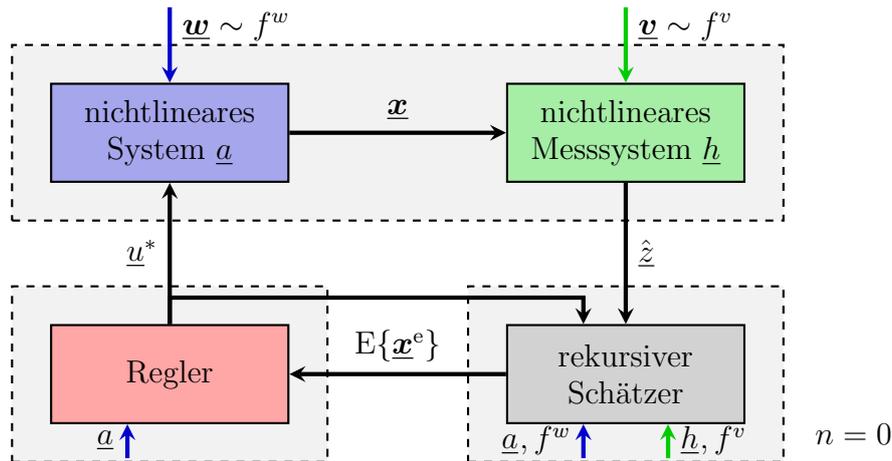


Abbildung 2.4: Deterministisch geregeltes System.

Der Regler bestimmt die Stellgröße \underline{u}_k^* auf Basis des Erwartungswerts des geschätzten Zustands \underline{x}^e sowie des deterministischen Systemmodells \underline{a} . Wissen über das stochastische Systemverhalten sowie die Zustandsschätzung wird nicht berücksichtigt.

Die Vernachlässigung der stochastischen Aspekte führt einerseits zu einer deutlichen Reduktion des Berechnungsaufwands, da eine stochastische Prädiktion entfällt und zukünftige Zustände als sicher angenommen werden, andererseits in der Regel aber zu suboptimalen Stellwertsequenzen.

Einen wichtigen Sonderfall stellt die Regelung linearer Systeme mit additivem weißem Rauschen mit endlichem zweiten Moment und kontinuierlichen unbeschränkten Stellgrößen und Zuständen dar. Soll eine quadratische Gütefunktion optimiert werden, wird dieses Regelungsproblem als das LQR⁴-Problem bezeichnet, welches sich mittels einer Riccati-Gleichung beschreiben lässt, und geschlossen lösbar ist, wobei die Lösung unabhängig von Rauscheinfluss ist [Ber00], d. h. der Rauscheinfluss vernachlässigt werden kann. Diese Tatsache wird auch als *Certainty-Equivalence-Principle* bezeichnet, gemäß dem insbesondere beim LQR-Problem die deterministische Regelung der optimalen Regelung im stochastischen Sinne entspricht. Ist hingegen eine der Voraussetzungen des LQR-Problems nicht gegeben (was z. B. bei nichtlinearen Systemen oder nichtquadratischen Gütefunktionen der Fall ist), dann führt eine Vernachlässigung des Rauscheinflusses in der Regel zu suboptimalen Stellwertsequenzen. D. h. bei der CEC gilt in der Regel das Certainty-Equivalence-Principle nicht tatsächlich, sondern wird lediglich als Grundlage für den Reglerentwurf herangezogen.

Sind die Systemzustände nicht direkt zugänglich, sondern müssen mittels eines Zustandsschätzers bestimmt werden, dann wird als Grundlage der deterministischen Regelung lediglich der Erwartungswert des geschätzten Zustandsvektors verwendet und die restlichen Dichteinformationen verworfen (Abb. 2.4). Ferner wird bei der deterministischen Regelung die Zugänglichkeit der Zustände bzw. das Verhalten des stochastischen Schätzers nicht berücksichtigt. Vielmehr werden Regler und Schätzer separat betrachtet, d. h. beim Reglerentwurf wird von direkt zugänglichen Zuständen ausgegangen, was bei nichtlinearen Systemen oder nichtquadratischen Gütefunktionen typischerweise zu suboptimalen Ergebnissen führt.

⁴ LQR: Linear Quadratic Regulator

Auch bei nicht direkt zugänglichen Zuständen stellt das LQR-Problem einen relevanten Sonderfall dar. Im Falle einer linearen Messgleichung kann gemäß des *Separationstheorems linearer Systeme mit quadratischen Kosten* der optimale Zustandsschätzer und der optimale Regler ohne Einbuße der Optimalität getrennt voneinander entworfen werden [Ber00]. Dieses Separationstheorem wird insbesondere beim LQG-Regelerentwurf⁵ verwendet, bei dem zusätzlich noch die Annahme additiven Gauß'schen Rauschens getroffen wird. Hier ist der optimale Schätzer das Kalman-Filter und der optimale Regler kann mittels der zeitdiskreten Riccati-Gleichung entworfen werden [Ber00]. Liegen nichtlineare System- und Messfunktionen oder nichtquadratische Gütefunktionen vor, gilt das Separationstheorem nicht und der getrennte Entwurf von Regler und Schätzer führt zu suboptimalen Ergebnissen.

2.5 Stochastische MPC

Soll eine möglichst hochqualitative Regelung erfolgen, dann ist die Verwendung eines deterministischen Systemmodells sowie die Reduktion des geschätzten Zustands auf den Erwartungswert nicht ausreichend, sondern es müssen auch die stochastischen Aspekte des System sowie des Messsystems und des Zustandsschätzers (Abb. 2.5) berücksichtigt werden. Hierbei können drei Fälle mit verschiedenen Modellen der Zugänglichkeit des Zustands, welche bei der Stellwertberechnung zugrundegelegt werden, unterschieden werden.

Open-Loop-Feedback (OLF):

Der Zustand wird zur Stellwertberechnung innerhalb des betrachteten Horizonts als *nicht zugänglich* modelliert, d. h. es liegt keine Zustandsrückführung vor.

Closed-Loop-Feedback mit direkt zugänglichen Zuständen (CLF-P):

Der Zustand wird zur Stellwertberechnung innerhalb des betrachteten Horizonts als *direkt zugänglich* modelliert.

Closed-Loop-Feedback mit nicht direkt zugänglichen Zuständen (CLF-I):

Der Zustand wird zur Stellwertberechnung innerhalb des betrachteten Horizonts als *nicht direkt zugänglich* modelliert, sondern es erfolgt eine stochastische Zustandsschätzung unter Berücksichtigung des Messsystems und der verschiedenen Rauscheinflüsse.

Die ersten beiden Fälle (OLF und CLF-P) stellen die Extreme bei der Modellierung der Zustandszugänglichkeit dar (keine bzw. direkte Zugänglichkeit) und erfordern nicht die Berücksichtigung vom Messsystem und Schätzer bei der Regelung. Eine CLF-I-Modellierung spiegelt das reale System (Abb. 2.5) typischerweise am besten wieder, ist aber auch am aufwändigsten, da sowohl Messsystem als auch Schätzer bei der Regelung berücksichtigt werden. Die ersten beiden Fälle können auch als Grenzfälle des CLF-I interpretiert werden. Eine OLF-Modellierung entspricht einem CLF-I bei Messrauschen mit einer unendlich großen Kovarianz, die Messungen

⁵ LQG: Lineare Systeme mit quadratischer Gütefunktion und Gauß'schem Rauschen

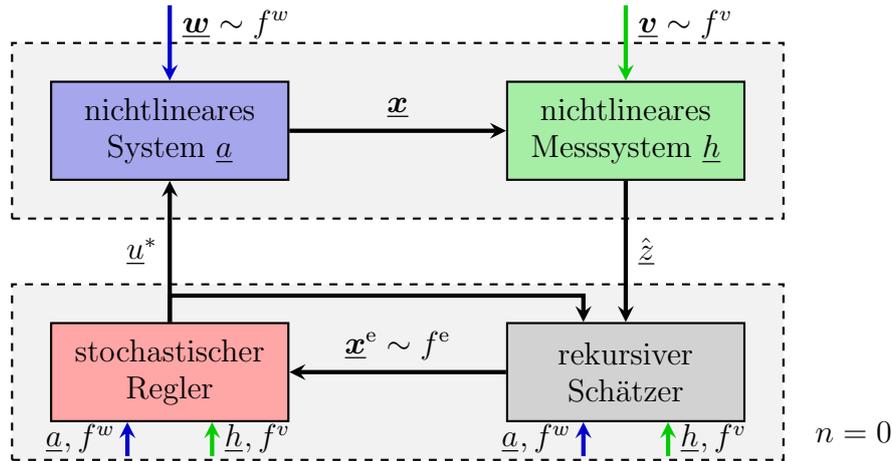


Abbildung 2.5: Stochastisch geregeltes System.

Der zu regelnde Systemzustand \underline{x} des nichtlinearen Systems ist nicht direkt zugänglich, sondern kann nur mittels Messungen $\hat{\underline{z}}$ geschätzt werden. Diese Schätzung erfolgt unter Berücksichtigung eines Modells des nichtlinearen Systems \underline{a} und des nichtlinearen Messsystems \underline{h} sowie Beschreibungen der Unsicherheiten in Form von Wahrscheinlichkeitsdichten f^w und f^v des Systemrauschens \underline{w} und des Messrauschens \underline{v} . Bei einem möglichst umfassenden stochastischen Regelungsansatz werden diese Informationen auch bei der Bestimmung der Stellgrößen verwendet.

haben so keinen Einfluss. Eine CLF-P-Modellierung entspricht einem CLF-I mit einer Messgleichung, welche die Zustände direkt ohne Rauscheinfluss auf die Messgrößen abbildet, wodurch die Zustände direkt zugänglich sind.

2.5.1 Open-Loop-Feedback-SNMPC

Wird bei der Berechnung der Stellwerte innerhalb des Optimierungshorizonts von keiner Zustandsrückführung ausgegangen, so wird dies als *Open-Loop-Feedback-Regelung* (OLF-Regelung) bezeichnet (Abb. 2.6). Bei den in dieser Arbeit betrachteten Systemen mit diskreten Stellwerten wird ausgehend von einer Zustandsschätzung für \underline{x}_k dieser Zustand für alle möglichen Stellwertsequenzen $u_{k,0:N-1}$ stochastisch auf Basis des Systemmodells

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{a}_k(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{w}_k)$$

prädiert und dann derjenige Stellwert ausgewählt, welcher die Gütefunktion (2.4) maximiert, was dem Optimierungsproblem

$$\underline{u}_k^*(\underline{x}_k) = \arg \max_{\underline{u}_k} \left\{ V_k^{\text{OLF}}(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \right\} \quad (2.5)$$

entspricht, wobei

$$V_k^{\text{OLF}}(\underline{x}_k, \underline{u}_k) = \max_{\underline{u}_{k,1:N-1}} \left\{ g_N(\underline{x}_{k,N}) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(\underline{x}_{k,n}, \underline{u}_{k,n}) \right\}$$

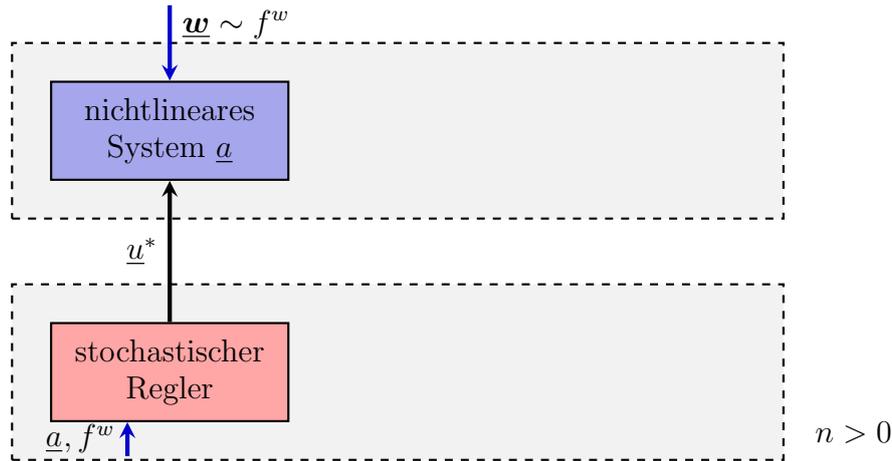


Abbildung 2.6: Systemmodell, welches bei der Stellwertberechnung der Open-Loop-Feedback-Regelung zugrunde gelegt wird.

Innerhalb des Prädiktionshorizontes ($n > 0$) erfolgt bei der OLF-Regelung die Modellierung derart, dass keine Zustandsrückführung besteht.

die über den Horizont kumulierte stellwertabhängige maximale OLF-Güte und

$$J_k^{\text{OLF}}(\underline{x}_k) = \max_{\underline{u}_k} \left\{ V_k^{\text{OLF}}(\underline{x}_k, \underline{u}_k) \right\}$$

die kumulierte stellwertunabhängige maximale OLF-Güte darstellt.

Für den Prädiktionshorizont wird also ein optimales Steuerungsproblem gelöst, dessen erster Stellwert dann zur Regelung des Systems verwendet wird. Auch bei diesem optimalen Steuerungsproblem (2.5) ist zu beachten, dass aufgrund der nichtlinearen Systemfunktion und/oder nichtquadratischen Gütefunktionen, anders als z. B. bei linearen Systemen mit quadratischer Gütefunktionen, das Systemrauschen Einfluss auf die optimale Steuerung hat und somit berücksichtigt werden muss.

2.5.2 Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen

Wird bei der Berechnung der Stellwerte innerhalb des Optimierungshorizonts davon ausgegangen, dass der Zustand direkt zugänglich ist, so wird dies als *Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen* (CLF-P)⁶ bezeichnet (Abb. 2.7). Bei einem derartigen Regler wird ein optimales Regelgesetz⁷

$$\underline{u}_{k,n} = \underline{v}_{k,n}(\underline{x}_{k,n}) \tag{2.6}$$

berechnet, welches einem konkreten Zustand eine optimale Stellgröße zuordnet. Unter der Annahme, dass dieses Regelgesetz innerhalb des Prädiktionshorizonts angewendet wird, und dass

⁶ engl.: closed-loop feedback SNMPC with perfect state information (CLF-P)

⁷ engl.: policy

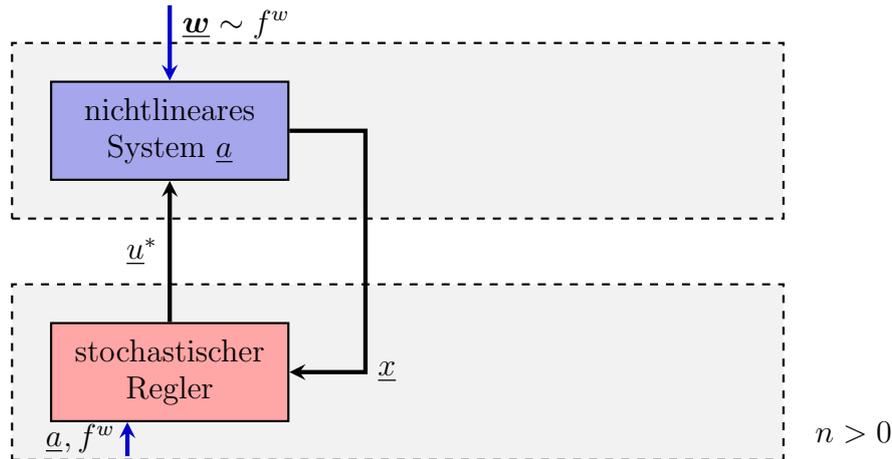


Abbildung 2.7: Systemmodell, welches bei der Stellwertberechnung der Closed-Loop-Feedback-Regelung mit direkt zugänglichen Zuständen zugrunde gelegt wird.

Innerhalb des Prädiktionshorizontes ($n > 0$) erfolgt bei der CLF-P-Regelung die Modellierung derart, dass eine direkte Zustandsrückführung besteht.

neben dem Systemmodell

$$\underline{\mathbf{x}}_{k+1} = \underline{a}_k(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{u}_k, \underline{\mathbf{w}}_k)$$

eine Messgleichung

$$\underline{z}_k = \underline{\mathbf{x}}_k$$

gilt, welche die direkte Zugänglichkeit des Systemzustands beschreibt, wird dann die Stellgröße \underline{u}_k^* gemäß

$$\underline{u}_k^*(\underline{\mathbf{x}}_k) = \arg \max_{\underline{u}_k} \left\{ V_k^{\text{CLF-P}}(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{u}_k) \right\} \quad (2.7)$$

berechnet, wobei

$$V_k^{\text{CLF-P}}(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{u}_k) = \max_{\underline{u}_{k,1:N-1}} \left\{ g_N(\underline{\mathbf{x}}_{k,N}) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{u}_{k,n}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n})) \right\}$$

die über den Horizont kumulierte stellwertabhängige maximale CLF-P-Güte und

$$J_k^{\text{CLF-P}}(\underline{\mathbf{x}}_k) = \max_{\underline{u}_k} \left\{ V_k^{\text{CLF-P}}(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{u}_k) \right\}$$

die kumulierte stellwertunabhängige maximale CLF-P-Güte bezeichnet.

Im Gegensatz zu der OLF-Regelung kann die Berechnung des optimalen Stellwerts bei der CLF-P nicht direkt durch eine vorwärtsgerichtete Prädiktion für alle möglichen Stellwertsequenzen erfolgen, da bei diesem Vorgehen nicht berücksichtigt werden würde, dass in jedem

Schritt innerhalb des Horizonts die Stellgröße anhand des Regelgesetzes $\underline{v}_{k,n}(\underline{x}_{k,n})$ abhängig vom bekannten Zustand gewählt wird.

Bei kumulativen Gütefunktionen (2.4) kann die Berechnung sehr effizient mittels dynamischer Programmierung (DP) schrittweise rückwärts unter Ausnutzung des Bellman'schen Optimalitätsprinzip [Bel57] erfolgen. Die Berechnung mit Hilfe der dynamischen Programmierung bietet den Vorteil, dass der Berechnungsaufwand nur linear von der Länge N des Horizonts abhängt. Außerdem kann die Gütefunktion für zeitinvariante Systeme mit zeitinvarianten Gütefunktionen bis auf den letzten Schritt vorberechnet werden, da der aktuelle Zustand lediglich im letzten Schritt der Berechnung berücksichtigt wird.

Eine sehr eng verwandte Klasse von Problemen sind die so genannten Markov'schen Entscheidungs-Prozesse (MDP)⁸, wobei bei diesen typischerweise Systeme mit diskreten Zuständen und diskreten Messwerten sowie unendlichen Optimierungshorizonten mit diskontierten Gütefunktionen betrachtet werden.

2.5.3 Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen

Typischerweise sind die zu regelnden Zustände eines Systems nicht direkt zugänglich⁹, sondern müssen mittels eines Schätzers oder Beobachters unsicherheitsbehaftet geschätzt werden, wobei diese Schätzung basierend auf Modellen des Systems $\underline{a}_k(\cdot)$, des Messsystems $\underline{h}_k(\cdot)$ sowie den zugehörigen Rauschdichten f_k^w und f_k^v erfolgt.

Wird bei der Berechnung der Stellwerte innerhalb des Optimierungshorizonts davon ausgegangen, dass eine Regelung basierend auf diesen Zustandsschätzungen erfolgt, wird dies als *Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen* (CLF-I)¹⁰ bezeichnet. Die entsprechende Struktur mit Zustandsschätzer und stochastischem Regler ist in Abb. 2.8 dargestellt. Wie bei der CLF-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen muss ein optimales Regelgesetz

$$\underline{u}_{k,n} = \underline{v}_{k,n}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n})$$

verwendet werden, wobei hier nicht mehr einem konkreten Zustand eine optimale Stellgröße zuordnet werden kann, sondern diese Stellgröße von einer Zufallsvariable $\underline{\mathbf{x}}_{k,n} \sim f_{k,n}$ abhängt. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Dichte $f_{k,n}$ dieser Zufallsvariable das Vorwissen über den Zustand $\underline{\mathbf{x}}_{k,n}$ subsumiert, d. h. eine Schätzung zum Zeitschritt k, n auf Basis einer initialen Schätzung $\underline{\mathbf{x}}_{k,0} \sim f_{k,0}$ sowie den bisherigen Stellgrößen $\underline{u}_{k,0:n-1}$ und Messungen $\hat{\underline{z}}_{k,1:n}$ darstellt. Die Stellgröße \underline{u}_k^* wird dann unter der Annahme, dass dieses Regelgesetz innerhalb des Prädiktionshorizonts angewendet wird, gemäß

$$\underline{u}_k^*(\underline{\mathbf{x}}_k) = \arg \max_{\underline{u}_k} \left\{ V_k^{\text{CLF-I}}(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{u}_k) \right\}. \quad (2.8)$$

⁸ engl.: Markov decision process (MDP)

⁹ engl.: partially observable

¹⁰ engl.: closed-loop feedback SNMPC with imperfect state information (CLF-I)

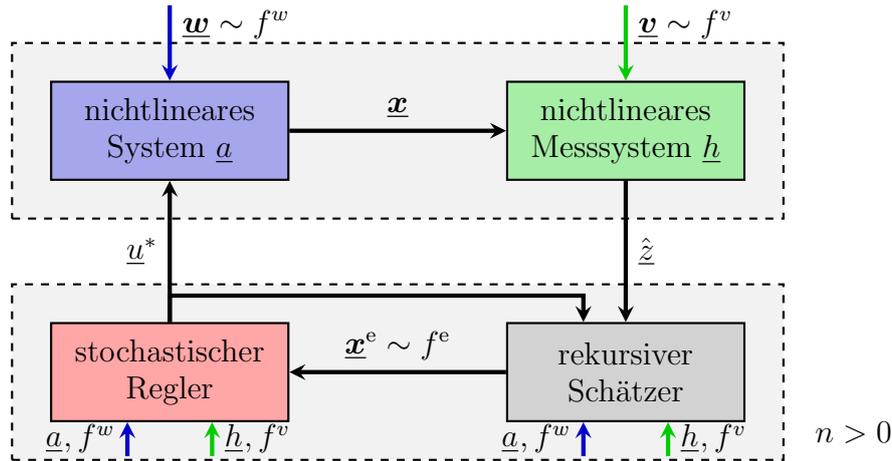


Abbildung 2.8: Systemmodell, welches bei der Stellwertberechnung der Closed-Loop-Feedback-Regelung mit nicht direkt zugänglichen Zuständen zugrunde gelegt wird.

Innerhalb des Prädiktionshorizontes ($n > 0$) erfolgt bei der CLF-I-Regelung die Modellierung derart, dass keine direkte Zustandsrückführung besteht, sondern der Systemzustand aus unsicherheitsbehafteten Messungen geschätzt wird.

berechnet, wobei

$$V_k^{\text{CLF-I}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \max_{\mathbf{u}_{k,1:N-1}} \left\{ g_N(\mathbf{x}_{k,N}) + \sum_{n=0}^{N-1} g_n(\mathbf{x}_{k,n}, \mathbf{u}_{k,n}(\mathbf{x}_{k,n})) \right\},$$

die über den Horizont kumulierte stellwertabhängige maximale CLF-I-Güte und

$$J_k^{\text{CLF-I}}(\mathbf{x}_k) = \max_{\mathbf{u}_k} \left\{ V_k^{\text{CLF-I}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \right\},$$

die kumulierte stellwertunabhängige maximale CLF-I-Güte bezeichnet. Neben dem Systemmodell

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{a}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k)$$

wird hierfür außerdem die nichtlineare Messgleichung

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

zugrundegelegt.

Auch zu dem CLF-I-Fall gibt es eine eng verwandte Klasse von Problemen mit wertdiskreten Zuständen und wertdiskreten Messwerten sowie typischerweise unendlichen Optimierungshorizonten mit diskontierten Gütefunktionen, die so genannten partiell beobachtbaren Markov'schen Entscheidungs-Prozesse (POMDP)¹¹.

¹¹ engl.: partially observable Markov decision process (POMDP)

In [PT87] wird gezeigt, dass bereits die Berechnung diskreter partiell beobachtbarer Markov'scher Entscheidungs-Prozesse PSPACE-vollständig ist, welches eine Obermenge von NP ist, also nicht in polynomieller Zeit berechnet werden kann. Im Vergleich dazu kann die Lösung von MDPs, also bei Systemen mit direkt beobachtbarem Zustand, mit polynomielltem Zeitaufwand berechnet werden. Der Aufwand zur Regelung von Systemen mit nicht direkt beobachtbarem Zustand ist also wesentlich höher als im CLF-P Fall.

Der Aufwand zur Berechnung einer Stellwertfolge bei der Closed-Loop-Feedback-Regelung mit nicht direkt zugänglichen Zuständen kann neben approximativen Berechnungen auch dadurch deutlich reduziert werden, dass alternativ direkt zugängliche Zustände (CLF-P) angenommen werden oder das analoge OLF-Problem gelöst wird. Hierbei ist natürlich zu beachten, dass dies nur eine Approximation des eigentlichen Problems darstellt, wobei OLF typischerweise zu überkonservativen und CLF-P zu überoptimistischen Ergebnissen führt.

KAPITEL 3

Stand der Technik

Die zentrale Herausforderung bei der modell-prädiktiven Regelung besteht in der Bestimmung von optimalen Stellgrößen gemäß einer Gütefunktion, wobei diese Gütefunktion von prädizierten Systemzuständen und Stellgrößen innerhalb eines N -schrittigen Prädiktions- bzw. Optimierungshorizonts abhängt. Abhängig von der Art des betrachteten Systems bzw. der Systemmodellierung finden sich dazu in der Literatur unterschiedliche, oft auf die betrachteten Problemstellungen spezialisierte Ansätze. Im Folgenden werden einige dieser Ansätze mit Schwerpunkt auf der *stochastischen* nichtlinearen modell-prädiktiven Regelung vorgestellt, wobei die verschiedenen Ansätze anhand einer Reihe unterschiedlicher Kriterien klassifiziert werden können. Zu diesen Kriterien zählen:

Art des betrachteten Systems

lineares Systemmodell \Leftrightarrow nichtlineares Systemmodell
zeitdiskretes Systemmodell \Leftrightarrow zeitkontinuierliches Systemmodell
wertdiskreter Zustandsraum \Leftrightarrow wertkontinuierlicher Zustandsraum
wertdiskrete Stellgrößen \Leftrightarrow wertkontinuierliche Stellgrößen

Randbedingungen

beschränkter Zustandsraum \Leftrightarrow unbeschränkter Zustandsraum
beschränkte Stellgrößen \Leftrightarrow unbeschränkte Stellgrößen

Unsicherheiten

deterministisches Systemmodell \Leftrightarrow stochastisches Systemmodell
Gauß'sches Systemrauschen \Leftrightarrow nicht-Gauß'sches Systemrauschen

Zugänglichkeit des Zustands

Zustand direkt zugänglich \Leftrightarrow Zustandsschätzung aus Messungen
Zustand zu jedem Zeitpunkt messbar \Leftrightarrow Zustand nicht zu jedem Zeitpunkt messbar

Art der Gütefunktion

quadratische Gütefunktion \Leftrightarrow nicht quadratische Gütefunktion

Art der Optimierung

Open-Loop Feedback \Leftrightarrow Closed-Loop Feedback

3.1 NMPC ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten

Zur Stellgrößenberechnung ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten, was dem wiederholten Lösen eines optimalen Steuerungsproblems entspricht, findet sich eine Vielzahl von Verfahren. Insbesondere die modell-prädiktive Regelung linearer Modelle mit quadratischen Gütefunktionen stellt eine recht gut verstandene Technik dar, die bereits auch breite industrielle Anwendung findet [QB97]. Die deutlich aufwändigere *nichtlineare* modell-prädiktive Regelung (NMPC), bei der insbesondere nichtlineare Systemmodelle verwendet werden, gilt auch als recht gut verstanden. Auch hier gibt es mittlerweile verschiedene Techniken, die den industriellen Einsatz von NMPC erlauben [QB00, FDN⁺01, FA02, DUF⁺01].

Bei kontinuierlichwertigen Stellgrößen und Zuständen liefert das Pontryagin'sche Minimumsprinzip eine Methode zur Lösung. Unter Zuhilfenahme dieses Prinzips wird in [Oht03] eine effiziente Berechnungsmethode angegeben. Basierend auf einer homotopischen Überführung eines Prädiktionshorizonts mit der Länge null, der eine einfache Lösung ermöglicht, wird die deutlich rechenintensivere Lösung des gewünschten endlichen Horizonts gefunden. Durch die Zuhilfenahme von zusätzlichen Hilfsstellgrößen¹ können auch Beschränkungen der Stellgrößen vorgenommen werden.

In [DFS⁺02, DFS⁺03] wird unter Verwendung der Optimierungsstrategie des *mehrfachen Schießens*² eine effiziente Lösung des NMPC-Optimierungsproblems für beschränkte Zustände und Stellgrößen gefunden und am praktischen Beispiel evaluiert.

3.2 Stochastische NMPC bei diskreten und linearen Systemen

3.2.1 Systeme mit diskreten Zuständen und Stellgrößen

Sollen Unsicherheiten bei der Regelung berücksichtigt werden, dann ist dies insbesondere bei Systemen mit diskreten Zuständen und Stellgrößen recht gut möglich. Für zeitdiskrete Systemmodelle und einer über dem Optimierungshorizont kumulativen Gütefunktion stellt hierzu die dynamische Programmierung (DP), welche Bellmans Optimalitätsprinzip [Bel57] ausnutzt, eine effiziente Methode zur Berechnung der optimalen Stellgrößen von CLF-P Problemen dar. Für Systeme mit endlich vielen diskreten Zuständen und Stellgrößen sowie einem endlichen Optimierungshorizont kann die Berechnung für beliebig geartetes Systemrauschen exakt erfolgen [Ber00]. Insbesondere für lange Optimierungshorizonte stellt die dynamische Programmierung eine effiziente Berechnungsmethode dar, da der Berechnungsaufwand nur linear von der Länge des betrachteten Optimierungshorizontes abhängt. Jedoch hängt der Berechnungsaufwand bei der dynamischen Programmierung typischerweise stark von der Größe bzw. Dimensionalität des

¹ engl.: dummy inputs

² engl.: multiple shooting

betrachteten Zustandsraumes ab, da bei der Berechnung in jedem Schritt der gesamte Zustandsraum berücksichtigt werden muss. Diese Tatsache wird auch als Fluch der Dimensionalität³ bezeichnet.

Einen wichtigen Sonderfall bildet die Berechnung bei unendlichen Optimierungshorizonten. Damit trotzdem endliche Gütefunktionen realisiert werden können (viele typische Gütefunktionen würden bei unendlichen Horizonten nicht konvergieren), wird oft ein Diskontierungsfaktor $0 < \gamma < 1$ in der Gütefunktion eingeführt⁴. Im Falle von stochastischen Systemen mit direkt zugänglichen Zuständen handelt es sich hier um einen Markov'schen Entscheidungs-Prozess (MDP). Dieser kann bei zeitinvarianten System- und Gütefunktionen mittels iterativer Verfahren approximativ berechnet werden [Ber00]. Hierzu zählt die so genannten *Value Iteration*⁵ sowie eine Vielzahl von Varianten, z. B. *Policy Iteration* [How60].

Ist der Systemzustand nicht direkt zugänglich sondern kann nur mittels rauschbehafteter Messungen geschätzt werden, handelt es sich um einen theoretisch gut verstandenen aber rechenintensiven partiell beobachtbaren Markov'schen Entscheidungs-Prozess (POMDP) [Dyn65, SS73]. Da eine exakte Lösung in der Regel nicht effizient gefunden werden kann [PT87, MHC99], werden hier typischerweise iterative numerische Ansätze, wie in [KLC98, PGT03, SV05] beschrieben, verwendet, wobei hier zur iterativen Berechnung neben der Zeitinvarianz des Systemmodells auch die Zeitinvarianz des Messmodells gewährleistet sein muss.

Approximative Lösungen, auch für unendliche (aber diskrete) Zustandsräume können durch Einsatz von Simulationstechniken gefunden werden. In [CMCFM07] geschieht dies basierend auf der simulierten Abkühlung⁶.

3.2.2 Lineare Systemmodelle

Für die technisch besonders relevanten Systeme mit kontinuierlichwertigen Zuständen finden sich nur vereinzelt Ansätze, welche stochastische Systemunsicherheiten bei der Regelung berücksichtigen. Diese Ansätze stellen auch nur Lösungen für bestimmte Spezialfälle dar, wobei die Verwendung linearer Systemmodelle von besonderer Bedeutung ist.

Dynamische Programmierung als solche ist nicht auf wertdiskrete Systeme beschränkt. Für bestimmte, in der Regel besonders einfache Systeme, kann die dynamische Programmierung auch direkt auf wertkontinuierliche Systeme angewendet werden. Dies gilt insbesondere für lineare Systeme mit additivem weißen Rauschen, unbeschränkten Stellgrößen und Zuständen sowie einer quadratischen Gütefunktion. Bei diesem so genannten LQR-Problem kann die Berechnung nicht nur geschlossen erfolgen, sondern die optimale stochastische Lösung entspricht auch der Lösung des korrespondierenden deterministischen Problems [Whi69, Ber00].

³ engl.: curse of dimensionality

⁴ Bei diskontierten Gütefunktionen werden die Anteile der Gütefunktion, die zukünftige Zeitschritte betreffen, mit einem Diskontierungsfaktor (engl.: discount factor) versehen, sodass zeitlich nahe Anteile einen höheren und zeitlich ferne einen niedrigen Einfluss haben.

⁵ Value Iteration Algorithmus: Rekursives Einsetzen in die Bellman-Gleichung, bis ein Fixpunkt erreicht ist.

⁶ engl.: simulated annealing

Ansätze zur OLF-SNMPC Stellgrößenberechnung linearer Systeme unter Nebenbedingungen werden in [BLW06, Bla06] vorgestellt, wobei hier endliche Optimierungshorizonte und zeitdiskrete Systeme mit kontinuierlichem Zustandsraum und kontinuierlichen Stellgrößen betrachtet werden. Bei den Nebenbedingungen handelt es sich aufgrund des stochastischen Charakters des Systems um unzulässige Bereiche des Zustandsraums, die nur mit einer Wahrscheinlichkeit unterhalb eines gewissen Schwellwertes erreicht werden sollen. In [BLW06] wird gezeigt, dass das stochastische Problem für Gauß'sches Rauschen mittels eines disjunktiven linearen Optimierungsproblems⁷ approximiert werden kann und somit die approximative Berücksichtigung des Rauscheinflusses zu keinem erheblichen Mehraufwand (im Vergleich zu der deterministischen Lösung) führt. Das gleiche Problem ohne Einschränkung auf Gauß'sches Rauschen wird in [Bla06] betrachtet. Hier wird mit Techniken der gemischt ganzzahligen linearen Programmierung⁸ eine optimale Stellgrößensequenz für eine feste Anzahl von *Samples* oder *Particles*, also Zustandskonfigurationen unter zufälligen exemplarischen Realisierungen des Rauscheinflusses, gefunden, welche die Nebenbedingung mit hinreichender Wahrscheinlichkeit erfüllt. Diese Lösung wird dann als allgemein gültig angenommen.

3.3 Stochastische NMPC bei nichtlinearen Systemen mit kontinuierlichwertigen Zuständen

3.3.1 Zeitkontinuierliche Systemmodelle

Einen Sonderfall stellt die Verwendung zeitkontinuierlicher Systemmodelle dar. Eine Erweiterung des Pontryagin'schen Minimumprinzips auf stochastische zeitkontinuierliche Systeme wird in [RRD04] vorgestellt, wobei hier ein zugrundeliegender $\hat{\text{Ito}}$ -Prozess angenommen wird. Ebenfalls ein Ansatz für die optimale Regelung stochastischer zeitkontinuierlicher Systeme, hier aber mit linearen Stellgrößen, wird in [Kap05a] und [Kap05b] vorgestellt. Unter der Bedingung, dass die Kostenfunktion quadratisch von der Stellgröße abhängt und speziellen Anforderungen an die Struktur des unterlagerten Rauschprozesses gelten, kann das optimale Regelungsproblem als ein Pfadintegral interpretiert werden, für das eine approximative Lösung mittels Monte-Carlo-Methoden gefunden werden kann.

3.3.2 Zeitdiskrete Systemmodelle mit wertkontinuierlichen Stellgrößen

Ein Verfahren zur stochastischen NMPC bei kontinuierlichen Zuständen und Stellgrößen, bei dem analog zur Zustandsschätzung mittels des Extended Kalman-Filters sowohl das System- als auch des Messmodell um den geschätzten Zustand linearisiert wird, und bei dem auch lediglich quadratische Gütefunktionen betrachtet werden, wird in [LR94] vorgestellt.

⁷ engl.: disjunctive linear programming problem

⁸ engl.: mixed-integer linear programming

In [KMSRL03, KMSRG04] wird ein Verfahren zur OLF-SNMPC vorgestellt, bei dem die stochastische Zustandsprädiktion mittels eines Gaußprozesses⁹ durchgeführt wird. Dazu müssen die Parameter des Gaußprozesses zunächst auf Basis gesamelter Daten der Systemfunktion gelernt werden, was unter Umständen zu einem nicht unerheblichen Fehler führt. Wiederum unter Verwendung von Gaußprozessen wird in [DPR08] ein Verfahren zur CLF-NMPC vorgestellt, bei der ein deterministisches Systemmodell, aber eine stochastische Schrittgütefunktion, angenommen wird. Hier wird der Gaußprozess dazu genutzt, eine Approximation der kumulativen Gütefunktion bei der dynamischen Programmierung zu erhalten, wobei dies wiederum ein Lernen der Parameter des Gaußprozesses erfordert.

In [BW07] wird skizziert, wie der Ansatz aus [Bla06] auf nichtlineare Systeme erweitert werden könnte. Hierzu soll ausgehend von einer initialen Lösung, welche Unsicherheiten nicht berücksichtigt, mittels eines nichtlinearen Optimierers in der Nähe dieser initialen Lösung eine Lösung unter Berücksichtigung von Unsicherheiten gefunden werden. Somit handelt es sich hierbei um keinen global-optimalen, sondern nur um einen lokalen Ansatz.

Ein Ansatz für die optimale Regelung stochastischer nichtlinearer zeitdiskreter Systeme mit endlichen Horizonten bei beliebigem Rauscheinfluss wird in [2] vorgestellt. Hier wird zunächst eine Lösung ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten unter Zuhilfenahme des Pontryagin'schen Minimumprinzips gefunden, wobei zur Berechnung ausgehend von einer linearisierten Lösung diese homotopisch in die eigentliche nichtlineare überführt wird [1]. Im Umfeld dieser initialen Lösung wird dann mittels dynamischer Programmierung, stochastischer Zustandsprädiktion und Gütefunktionsapproximation eine durch kubische Splines genäherte lokal optimale Lösung für das stochastische optimale Regelungsproblem berechnet.

3.3.3 Zeitdiskrete Systemmodelle mit diskreten Stellgrößen

Ein Lösungsansatz für das optimale Regelungsproblem stochastischer zeitdiskreter Systeme mit kontinuierlichem Zustandsraum und diskreten Stellgrößen wird in [NB03] vorgestellt, wobei hier von einem unendlichen Optimierungshorizont und einer diskontierten Gütefunktion ausgegangen wird. Die Lösung basiert, unter Zuhilfenahme des Value Iteration Algorithmus, auf der Approximation der Gütefunktion mittels eines Radial-Basis-Function Netzwerks mit einer endlichen Anzahl fest positionierter Gaußglocken.

Für Systeme, welche neben diskreten Zuständen mit einem einzigen eindimensionalen kontinuierlichwertigen Zustand beschrieben werden können, wird in [MTT06, MKT07] ein Lösungsansatz vorgestellt. Damit dieser Ansatz angewendet werden kann, muss der eindimensionale kontinuierlichwertige Zustand eine kontinuierlich abnehmende Ressource darstellen. Das Verhalten dieser kontinuierlichen Größe wird mit Phasentyp-Verteilungen bestehend aus Exponentialverteilungsblöcken approximiert, was dann die Anwendung des Value Iteration Algorithmus erlaubt.

⁹ Ein Gaußprozess (engl.: Gaussian process) stellt eine Approximation der Verteilung über eine Funktion ausgehend von einem Satz Stützstellen dar.

3.3.4 Zeitdiskrete Systemmodelle mit nicht direkt zugänglichen Zuständen

Eine besondere Herausforderung entsteht, wenn die zu regelnden Zustände nicht direkt zugänglich sind und diese Tatsache bei der Regelung mitberücksichtigt werden soll.

Wie bereits in Abschnitt 2.4 beschrieben kann im Falle linearer Systeme mit quadratischer Gütefunktion ein optimaler Schätzer und ein optimaler deterministischer Regler, welcher auf Basis des Erwartungswerts des Zustandsschätzers regelt, ohne Einbuße der Optimalität getrennt voneinander entworfen werden. Bei Gauß'schen Rauschen ist der optimale Schätzer das Kalman Filter, was dann zusammen als LQG-Reglerentwurf bezeichnet wird.

Im Falle nichtlinearer Systeme gibt es insbesondere im Kontext von POMDPs mit kontinuierlichen Zuständen einige wenige Verfahren zur approximativen Stellwertberechnung. Eine Erweiterung eines diskreten POMDP Lösungsverfahrens für lineare Systeme mit kontinuierlichen Zuständen aber diskreten Messungen wird in [PSV05, PVSP06] vorgestellt. Ein Lösungsverfahren für POMDPs mit kontinuierlichen Zuständen und Messungen, basierend auf Monte-Carlo Sampling, wird in [Thr00] beschrieben. In [BMWDW05, BMWDW06] wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem eine parametrische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichten, welche den Systemzustand repräsentieren, verwendet wird. All diese Verfahren haben ebenso wie die Verfahren zum Lösen diskreter POMDPs eine iterative Struktur, weshalb ausschließlich zeitinvariante System- und Messmodelle sowie zeitinvariante Gütefunktionen berücksichtigt werden können. Ebenso ist die Verwendung eines Diskontierungsfaktors zur Gewährleistung der Konvergenz notwendig.

Open-Loop-Feedback-SNMPC

In diesem Kapitel werden Techniken beschrieben, mittels denen unter Zuhilfenahme geeigneter Approximationen und Modellierungen effizient Stellwerte für das stochastische optimale Steuerungsproblem (2.5) der Open-Loop-Feedback-SNMPC (OLF, Abschnitt 2.5.1) bei Systemen mit kontinuierlichen Zuständen und diskreten Stellgrößen berechnet werden können. Dazu werden in Abschnitt 4.1 Techniken zur effizienten hochqualitativen Zustandsprädiktion über mehrere Zeitschritte beschrieben. In Abschnitt 4.2 werden dann verschiedene Verfahren zur Repräsentation der Schrittgröße vorgestellt, welche einerseits eine flexible Modellierung zulassen, andererseits aber auch eine effiziente, d. h. idealerweise geschlossene, probabilistische Auswertung der Gütefunktion bei stochastisch verteilten Zuständen erlauben. Das Kapitel schließt mit der Beschreibung von Verfahren zur effizienten Auswertung des sich bei der Optimierung über mehrere Schritte ergebenden Suchbaums.

4.1 Prädiktion des Systemzustands

Die zeitdiskrete Systemgleichung (2.1) beschreibt die Entwicklung des Systemzustands $\underline{\boldsymbol{x}}_k$ abhängig von der Stellgröße \underline{u}_k und dem Systemrauschen $\underline{\boldsymbol{w}}_k \sim f_k^w$ über der Zeit. Im Folgenden werden insbesondere Systeme mit additivem Rauschen betrachtet, was

$$\underline{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \underline{a}_k(\underline{\boldsymbol{x}}_k, \underline{u}_k) + \underline{\boldsymbol{w}}_k \quad (4.1)$$

entspricht.

Wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben, muss zur Lösung des optimalen Steuerungsproblems der Open-Loop-Feedback-Regelung für alle möglichen Stellgrößensequenzen $\underline{u}_{k,0:N-1}$ der Systemzustand $\underline{\boldsymbol{x}}_{k,1:N}$ über einen N -schrittigen Horizont prädiziert werden, was zu dem Suchbaum in (Abb. 4.1) führt. Für ein bestimmtes festes k kann die Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{f}_{n+1}^p(\underline{\boldsymbol{x}}_{n+1})$ des Systemzustands $\underline{\boldsymbol{x}}_{n+1}$ für den nachfolgenden Zeitschritt $n + 1$ und somit auch rekursiv für die nächsten N Zeitschritte mit Hilfe der Chapman-Kolmogorov Gleichung [Sch73]

$$\tilde{f}_{n+1}^p(\underline{\boldsymbol{x}}_{n+1}) = \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{\boldsymbol{x}}_{n+1}|\underline{\boldsymbol{x}}_n) \tilde{f}_n(\underline{\boldsymbol{x}}_n) d\underline{\boldsymbol{x}}_n, \quad (4.2)$$

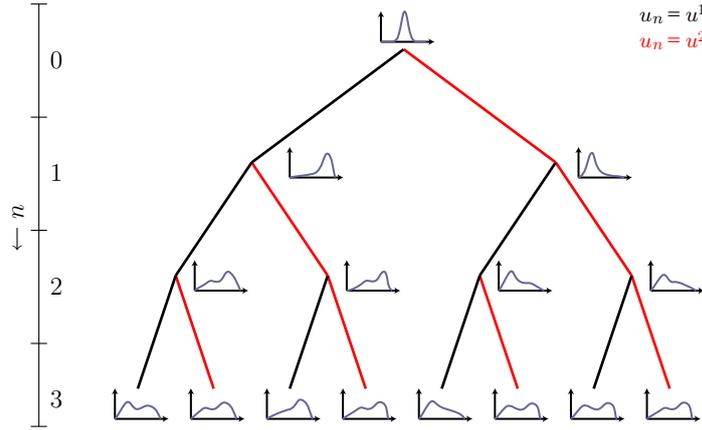


Abbildung 4.1: Suchbaum, der sich bei Open-Loop-Feedback-SNMPC für einen $N = 3$ schrittigen Horizont bei zwei alternativen Stellgrößen u^1 und u^2 ergibt. In den Graphen sind exemplarisch die prädierten Wahrscheinlichkeitsdichten, welche die Grundlage zur Auswertung der Gütefunktionen bilden, dargestellt.

berechnet werden. Bei $\tilde{f}_{\underline{u}_k}^T(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k)$ handelt es sich um die von der diskreten Stellgröße \underline{u}_k abhängigen Systemtransitionsdichte. Die Systemtransitionsdichte ist eine bedingte Dichte, welche bei einem d^x -dimensionalen Zustandsraum als eine $2 \cdot d^x$ -dimensionale Funktion $\tilde{f}_{\underline{u}_k}^T(\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_k)$ interpretiert werden kann (Abb. 4.2). Für den hier betrachteten Fall additiven weißen Rauschens ist die Systemtransitionsdichte mit der Systemfunktion (4.1) gemäß

$$\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) = f_n^w(\underline{x}_{n+1} - \underline{a}_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n))$$

verknüpft, wobei $f_n^w(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens \underline{w}_n repräsentiert. Die Einschnitt-Prädiktion eines konkreten Zustands \underline{x}_n führt somit zu einer Wahrscheinlichkeitsdichte des prädierten Zustands $f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1})$, welche die identische Form wie die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens $f_n^w(\underline{w}_n)$ hat.

Im Fall linearer Systeme mit Gauß'schen Zufallsvariablen stellt der Prädiktionsschritt des Kalman-Filters [Kal60, Sim06] eine geschlossene Lösung von (4.2) dar, da sich in diesem Fall die Gleichung auf ein Integral über dem Produkt zweier Gaußdichten reduziert, was geschlossen lösbar ist. Bei nichtlinearen Systemfunktionen ist eine geschlossene Lösung in der Regel nicht möglich. Daher ist hier zur Berechnung eine Approximation notwendig. Generell sind hier zwei Arten von Approximationen möglich: Approximation der Dichte $\tilde{f}_k(\underline{x}_k)$ des aktuellen Zustands oder Approximation der Transitionsdichte. Die Approximation der Dichte $\tilde{f}_k(\underline{x}_k)$ des aktuellen Zustands wird z. B. bei Partikel-Filtern [AMGC02], beim Unscented Kalman-Filter (UKF) [JU04], bei Gaußfiltern [HH08] sowie bei optimalen Sampling-Verfahren [SBH06a, SBH06b, SH07] angewendet. Beim Extended Kalman-Filter (EKF) hingegen wird die Transitionsdichte approximiert, d. h. das System linearisiert [Sim06], wobei das UKF ebenfalls als eine Approximation der Transitionsdichte interpretiert werden kann, da es sich hier um eine stochastische Linearisierung des Systems handelt [LBS02].

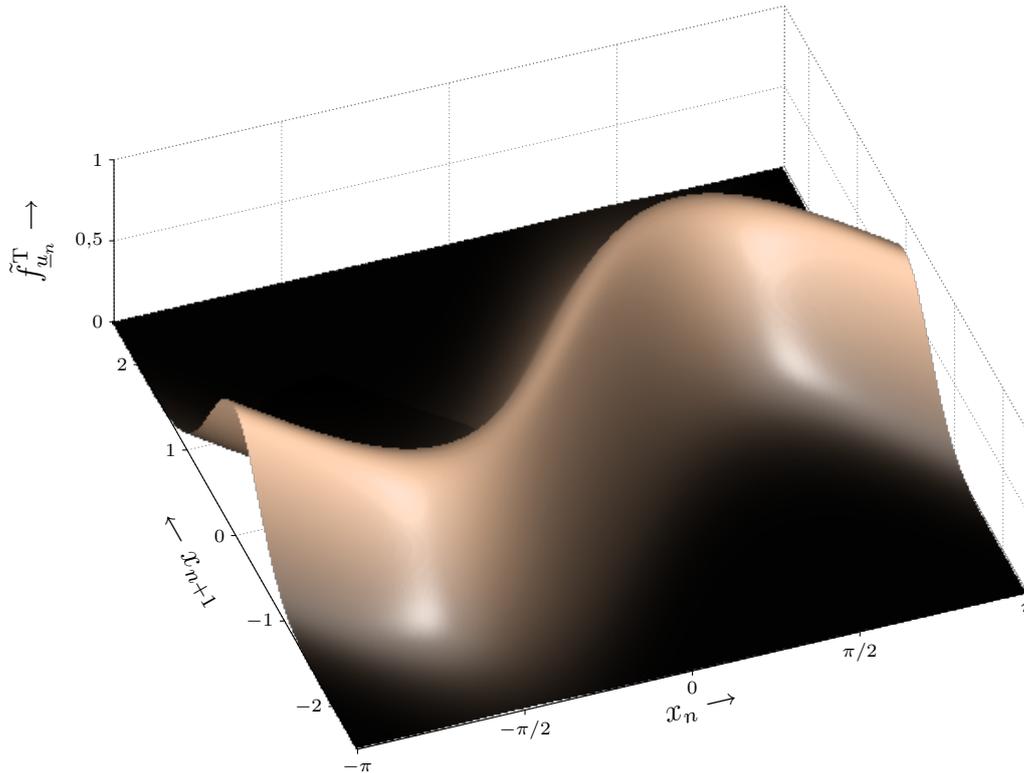


Abbildung 4.2: Transitionsdichte des Systems $a(\mathbf{x}_{n+1}) = \sin(\mathbf{x}_n) + \mathbf{w}_n$ mit mittelwertfreiem Gauß'schen Rauschen \mathbf{w}_n mit Standardabweichung $\sigma^w = 0,5$.

Für das hier vorgestellte SNMPC-Framework werden Methoden verwendet, welche auf Approximation der Transitionsdichte basieren [HBH06, HH07a, HH07b]. Die verwendeten Methoden sind im besonderen Maße geeignet, da sie

1. sehr hochqualitative Approximationen der Zustandsdichte liefern,
2. eine Prädiktion über mehrere Zeitschritte mit konstanter Komplexität gestatten und
3. sie direkt erlauben, dynamische Programmierung anzuwenden (siehe hierzu Kapitel 5).

Insbesondere eine hochqualitative, d. h. die Form der Wahrscheinlichkeitsdichte erhaltende, Approximation ist bei den meisten approximativen Verfahren zur Zustandsprädiktion nicht gegeben. Bei Verfahren wie dem EKF oder UKF, welche die Standardverfahren zur Zustandsprädiktion auf Basis der Systemapproximation darstellen, werden nur die ersten beiden Momente einer Dichte berücksichtigt, was zu recht groben Approximationen führt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei alternative Funktionsklassen zur Approximation der Transitionsdichte verwendet, die jeweils in den nächsten beiden Abschnitten vorgestellt werden.

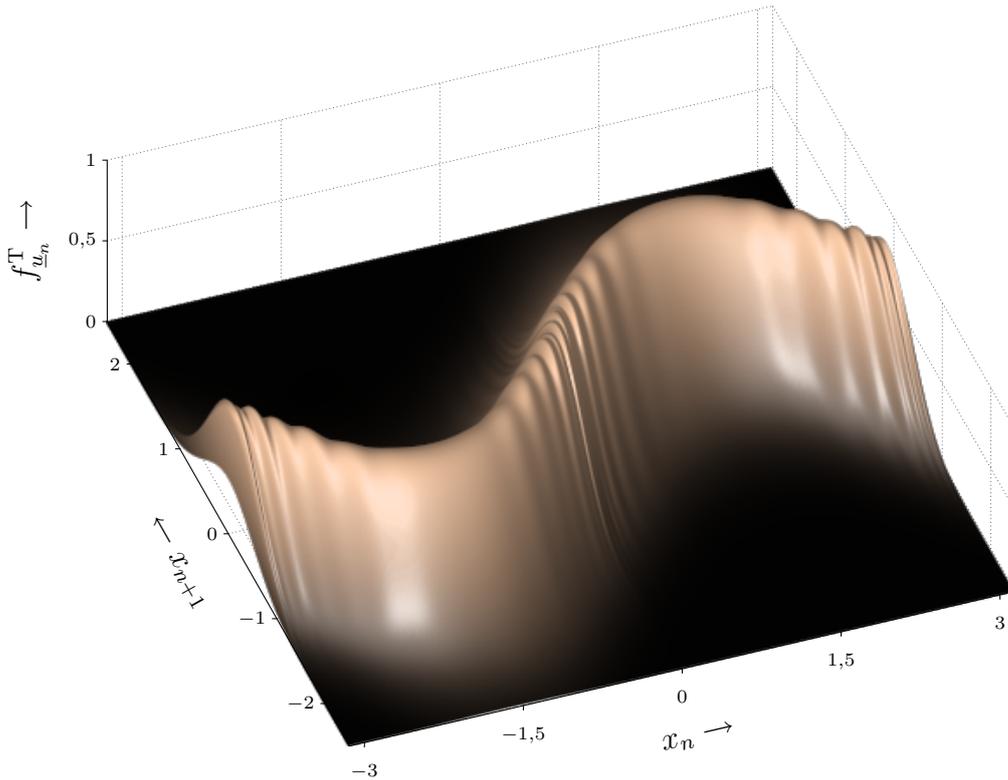


Abbildung 4.3: Approximation der Transitionsdichte des Systems $a(\mathbf{x}_{n+1}) = \sin(\mathbf{x}_n) + \mathbf{w}_n$ mit mittelwertfreiem Gauß'schen Rauschen \mathbf{w}_n mit Standardabweichung $\sigma^w = 0,5$ durch eine Gaußmischdichte mit 40 achsenausgerichteten Komponenten. Die Optimierung des Parametervektors der Gaußmischdichte erfolgte mit den in [HBH06] beschriebenen Verfahren.

4.1.1 Approximation der Transitionsdichte mittels Gaußfunktionen

Die erste Alternative basiert auf der Approximation der Transitionsdichte $\tilde{f}_{\mathbf{u}_k}^T(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$ in (4.2) innerhalb eines bestimmten Intervalls durch eine Gaußmischfunktion¹ (Abb. 4.3). Dieses Verfahren wird in [5] bzw. [9] im Kontext von SNMPC beschrieben und basiert auf den Dichteapproximationstechniken aus [HBH06]. Bei einer Gaußmischfunktion, einer Summe gewichteter Gaußfunktionen der Form

$$\sum_{i=1}^L \omega_i \cdot \mathcal{N}(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\boldsymbol{\mu}}_i; \mathbf{C}_i),$$

handelt es sich um einen universellen Funktionsapproximator [MS96]. Daher kann mittels dieser Approximation die Transitionsdichte einer beliebigen Systemfunktion mit additivem Rauschen, dessen Wahrscheinlichkeitsdichte auch beliebig geformt sein kann, approximiert werden. Eine Einschränkung, z. B. dass das Rauschen normalverteilt sei, besteht nicht.

Damit eine effiziente Zustandsprädiktion auch über mehrere Zeitschritte möglich ist, wird eine besondere Form von Gaußmischdichten, sogenannte achsenausgerichtete Gaußmischfunktionen, verwendet. Bei diesen Funktionen sind die einzelnen Komponenten achsenausgerichtet, d. h.

¹ engl.: Gaussian mixture

deren Kovarianzmatrizen \mathbf{C}_i sind nur auf der Hauptdiagonalen besetzt

$$\mathbf{C}_i = \text{diag}(\underline{\sigma}_i)^2 .$$

Somit sind die einzelnen $(2 \cdot d^x)$ -dimensionalen Komponenten als Produkt darstellbar

$$\begin{aligned} f_{\underline{u}_n}^{\text{T}}(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) &= \sum_{i=1}^L \omega_i \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_i^{(n)}; \text{diag}(\underline{\sigma}_i^{(n)})^2) \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \text{diag}(\underline{\sigma}_i^{(n+1)})^2) , \\ &= \sum_{i=1}^L \omega_i \cdot \prod_{j=1}^{d^x} \mathcal{N}(x_{n,j} - \mu_{i,j}^{(n)}; \sigma_{i,j}^{(n)}) \cdot \prod_{k=1}^{d^x} \mathcal{N}(x_{n+1,k} - \mu_{i,k}^{(n+1)}; \sigma_{i,k}^{(n+1)}) . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Derartige achsenausgerichtet Gaußmischdichten können vollständig mit einem Parametervektor

$$\underline{\eta} = [\underline{\eta}_1^{\text{T}}, \dots, \underline{\eta}_L^{\text{T}}]^{\text{T}}$$

beschrieben werden, wobei die Parameter für eine einzelne Gaußfunktionen durch

$$\underline{\eta}_i = [\omega_i, \underline{\mu}_i^{(n)}, \underline{\sigma}_i^{(n)}, \underline{\mu}_i^{(n+1)}, \underline{\sigma}_i^{(n+1)}]^{\text{T}}$$

gegeben sind.

Ausgehend von einem Gütekriterium, wie z. B. der quadratischen Differenz, kann ein Parametervektor $\underline{\eta}$ bestimmt werden, der zu einer hochqualitativen Approximation von $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^{\text{T}}(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ durch $f_{\underline{u}_n}^{\text{T}}(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ führt. Ein Verfahren hierzu, bei dem die Lösung des sich ergebenden hochdimensionalen Optimierungsproblems durch eine progressive Optimierung erfolgt, wird in [HBH06] vorgestellt.

Ist die Dicht des vorherigen Zustandes ebenfalls durch eine Gaußmischdichte $f_n(\underline{x}_n) = \sum_{j=1}^{L^x} \omega_j^x \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_j; \mathbf{C}_j)$ gegeben, dann kann der Prädiktionsschritt (4.2) geschlossen gelöst werden.

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{\text{P}}(\underline{x}_{n+1}) &= \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}_{\underline{u}_n}^{\text{T}}(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) \cdot f_n(\underline{x}_n) \, d\underline{x}_n \\ &= \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^L \omega_i \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_i^{(n)}; \mathbf{C}_i^{(n)}) \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \mathbf{C}_i^{(n+1)}) \cdot \sum_{j=1}^{L^x} \omega_j^x \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_j; \mathbf{C}_j) \, d\underline{x}_n \\ &= \sum_{i=1}^L \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \mathbf{C}_i^{(n+1)}) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{L^x} \omega_i \omega_j^x \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_i^{(n)}; \mathbf{C}_i^{(n)}) \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_n - \underline{\mu}_j; \mathbf{C}_j) \, d\underline{x}_n}_{\omega_i^{(n+1)}} \\ &= \sum_{i=1}^L \omega_i^{(n+1)} \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \mathbf{C}_i^{(n+1)}) . \end{aligned}$$

Bei der sich ergebenden Wahrscheinlichkeitsdichte handelt es sich wiederum um eine Gaußmischdichte, wobei in dem hier betrachteten Fall einer Transitionsdichte mit L achsenausgerichteten Komponenten wie in (4.3) die Anzahl der Komponenten der prädizierten Zustandsdichte $f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1})$ der Anzahl der Komponenten der Transitionsdichte entspricht [HBH06].

Somit ist durch die achsenausgerichtete Struktur der approximierten Transitionsdichte eine Zustandsprädiktion über mehrere Zeitschritte mit konstanter Komplexität möglich, wobei die Qualität der Approximation durch die Anzahl der Komponenten der approximierten Transitionsdichte bestimmt werden kann.

Im Falle einer nicht-achsenausgerichteten Transitionsdichte würde sich eine prädizierte Zustandsdichte $f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1})$ mit $L \times L^x$ Komponenten ergeben, wobei L^x die Anzahl der Komponenten von $f_n(\underline{x}_n)$ darstellt. Somit würde also die Anzahl der Komponenten exponentiell mit der Anzahl der Prädiktionsschritte wachsen.

Die qualitativ sehr hochwertige Approximation der Transitionsdichte mit Gaußmischfunktionen stellt ein recht anspruchsvolles Optimierungsproblem dar, welches in der Regel effizient nur für ein- und zweidimensionale System gelöst werden kann. Ferner können auch nur zeitinvariante Systeme effizient behandelt werden, da die Approximation der Transitionsdichte zu aufwändig ist, als dass sie während der eigentlichen Regelung durchgeführt werden könnte. Dennoch kann auch für höherdimensionale und zeitvariante Systeme die Transitionsdichtenapproximation mit achsenausgerichteten Komponenten effizient eingesetzt werden, wenn mit Techniken zur Komplexitätsreduktion (Abschnitt 4.1.3) das Gesamtsystem in mehrere kaskadierte Teilsysteme zerlegt wird.

4.1.2 Approximation der Transitionsdichte mittels hybrider Dichten

Als Alternative zur Approximation der Transitionsdichte $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ mit Gaußmischfunktionen kann zur Berechnung der prädizierten Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1})$ die Transitionsdichte auch auf einem vorgegebenen Intervall mit einer so genannten hybriden Dichten [HH07b] approximiert werden (Abb. 4.4). Dieses Verfahren wird in [6] im Kontext von SNMPC beschrieben. Bei einer hybriden Dichte handelt es sich, wie bei einer Gaußmischfunktion, um eine gewichtete Summe von L Komponenten

$$f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) = \sum_{i=1}^L \omega_i \cdot \delta(\underline{x}_n - \underline{\mu}_i^{(n)}) \cdot f(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \underline{\nu}_i), \quad (4.4)$$

wobei ω_i die Gewichtungsfaktoren mit $\omega_i > 0$ sind, $\underline{\mu}_i^{(n)}$ und $\underline{\mu}_i^{(n+1)}$ die Position der Komponenten bestimmt und $\underline{\nu}_i$ Formparameter von $f(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \underline{\nu}_i)$ sind. Diese Komponenten sind als Produkt darstellbar, wobei es sich in der Dimension des aktuellen Zustands \underline{x}_n um Diracdistributionen $\delta(\underline{x}_n - \underline{\mu}_i^{(n)})$ und in der Dimension des prädizierten Zustandes \underline{x}_{n+1} um Dichtefunktionen $f(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \underline{\nu}_i)$ handelt, deren Typ der Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemrauschens entspricht. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass es sich beim Systemrauschen entweder

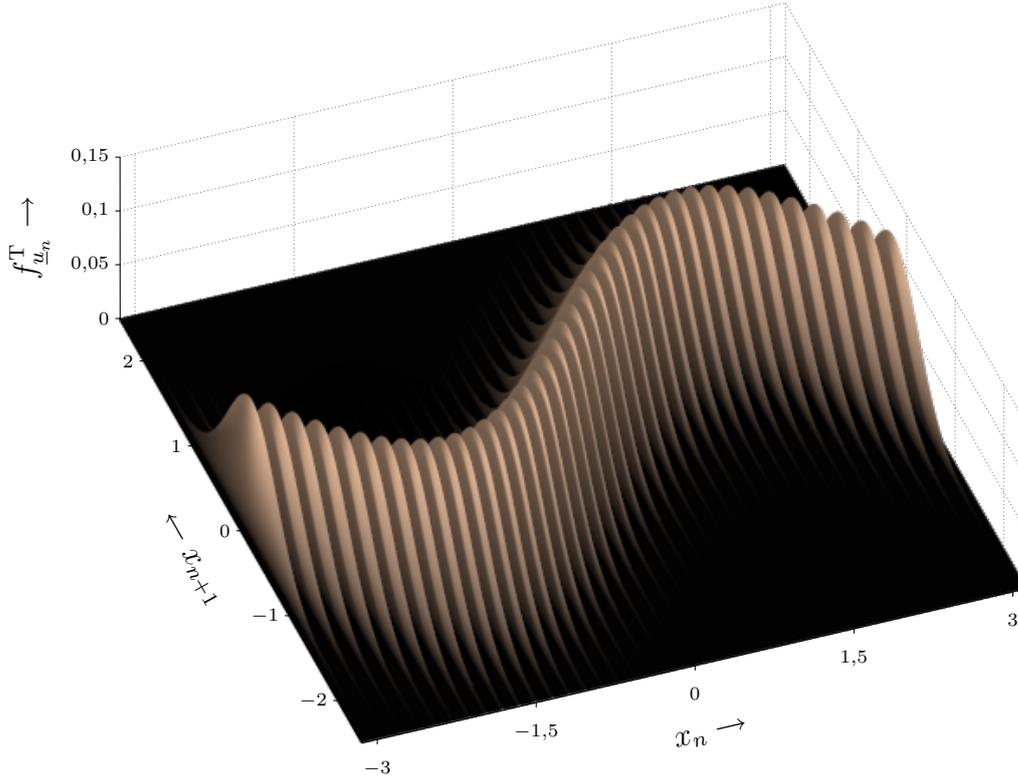


Abbildung 4.4: Approximation der Transitionsdichte des Systems $a(\mathbf{x}_{n+1}) = \sin(\mathbf{x}_n) + \mathbf{w}_n$ mit mittelwertfreiem Gauß'schen Rauschen \mathbf{w}_n mit Standardabweichung $\sigma^w = 0,5$ durch eine hybride Dichte mit 40 Komponenten. Die Wahl des Parametervektors der hybriden Dichte erfolgte mit den in [HH07b] beschriebenen Verfahren.

um Gauß'sches Rauschen handelt oder aber, dass das Rauschen mittels einer Gaußmischdichte mit L^w Gaußkomponenten approximiert werden kann, was zur folgenden Form führt

$$f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) = \sum_{j=1}^{\dot{L}} \left(\dot{\omega}_j \cdot \delta(\underline{x}_n - \underline{\dot{\mu}}_j^{(n)}) \cdot \sum_{l=1}^{L^w} \dot{\omega}_l^{(n+1)} \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\dot{\mu}}_{j,l}^{(n+1)}; \dot{\mathbf{C}}_{j,l}^{(n+1)}) \right).$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Summen kann diese Form wiederum in eine Form mit Gauß'schem Rauschen und $L = \dot{L} \cdot L^w$ Komponenten überführt werden

$$f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) = \sum_{i=1}^L \omega_i \cdot \delta(\underline{x}_n - \underline{\mu}_i^{(n)}) \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \mathbf{C}_i^{(n+1)}). \quad (4.5)$$

Zur Bestimmung der Parameter für die optimale Approximation der Transitionsdichte (4.4) bzw. (4.5) mittels einer hybriden Dichte bedarf es im Gegensatz zur Approximation mittels einer Gaußmischfunktion keiner aufwändigen nichtlinearen Optimierung, wobei Methoden zur Wahl der optimalen Parameter von (4.4) bzw. (4.5) in [HH07b] beschrieben werden. Somit können direkt höherdimensionale sowie zeitvariante Systeme auch mit nicht-stationärem Rauschen approximiert werden [HH07a, SHH07].

Wird die Transitionsdichte $\tilde{f}_{n+1}^T(\underline{x}_{n+1})$ durch eine hybride Dichte approximiert, handelt es sich bei der sich ergebenden Wahrscheinlichkeitsdichte des prädizierten Zustandes \underline{x}_{k+1} um eine

Gaußmischdichte der Form

$$f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1}) = \sum_{i=1}^L \omega_i^{(n+1)} \cdot \mathcal{N}\left(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_i^{(n+1)}; \mathbf{C}_i^{(n+1)}\right),$$

mit L Komponenten. Somit ist die Form der prädizierten Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1})$ bei der Transitionsdichtenapproximation durch eine hybride Dichte sowie durch eine Gaußmischdichte (Abschnitt 4.1.1) identisch. Der Prädiktionsschritt (4.2) kann hier sehr einfach und in geschlossener Form durchgeführt werden, da die Multiplikation und Marginalisierung mit einer Diracdistribution lediglich der Auswertung der Dichtefunktion des aktuellen Zustands \underline{x}_k entspricht. Daher können die Gewichte $\omega_i^{(n+1)}$ direkt durch Auswertung von $\tilde{f}_n(\underline{x}_n)$ an den Stellen $\underline{\mu}_i^{(n)}$ der approximierten Transitionsdichte berechnet werden. Die Parameter $\underline{\mu}_i^{(n+1)}$ und $\mathbf{C}_i^{(n+1)}$ von $f_{n+1}^p(\underline{x}_{n+1})$ entsprechen den Parametern der Gaußkomponenten der approximierten Transitionsdichte (4.5).

Somit ist auch bei der Verwendung von hybriden Funktionen zur Transitionsdichtenapproximation eine effiziente Zustandsprädiktion über mehrere Zeitschritte mit konstantem Aufwand möglich, wobei der Aufwand lediglich von der Anzahl der zur Approximation der Transitionsdichte verwendeten Komponenten L abhängt. Im Gegensatz zur Approximation mit Gaußmischfunktionen ist diese Approximation aber deutlich einfacher und schneller durchführbar, sodass auch höherdimensionale und zeitvariante Systeme effizient behandelt werden können. Verglichen mit Gaußmisch-Approximation führt die Verwendung von hybriden Funktionen typischerweise bei gleicher Anzahl von Komponenten zu einer Approximation mit verminderter Qualität. Dies ist der Fall, da die Diracdistributionen der hybriden Funktion einer Abtastung entsprechen, was dazu führen kann, dass hochfrequente Signalanteile ignoriert werden bzw. zu Aliasing führen, was bei Gaußfunktionen durch die implizite Glättung vermindert wird.

4.1.3 Komplexitätsreduktion: Modularisierung

Da der Approximationsaufwand sowohl bei der Approximation durch Gaußmischfunktionen als auch durch hybride Funktionen mit der Dimensionalität deutlich überproportional ansteigt, kann bei vielen Systemen der Berechnungsaufwand durch eine Zerlegung des Gesamtsystemmodells in kaskadierte Submodelle deutlich verringert werden.

Wie in [5] gezeigt, kann die $(2 \cdot d^x)$ -dimensionale Transitionsdichte $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ der Systemgleichung (4.1) unter der Annahme, dass der additive Rauschvektor

$$\underline{\mathbf{w}}_n = [\mathbf{w}_{n,1}, \mathbf{w}_{n,2}, \dots, \mathbf{w}_{n,d^x}]^T \in \mathbb{R}^{d^x}$$

weiß ist und dessen Elemente $\mathbf{w}_{n,j}$ unabhängig sind, in d^x Transitionsdichten skalarer Teilsysteme $a_{n,j}(\cdot)$, $j = 1, 2, \dots, d^x$,

$$\underline{a}_n(\cdot) = [a_{n,1}(\cdot), a_{n,2}(\cdot), \dots, a_{n,d^x}(\cdot)]^T$$

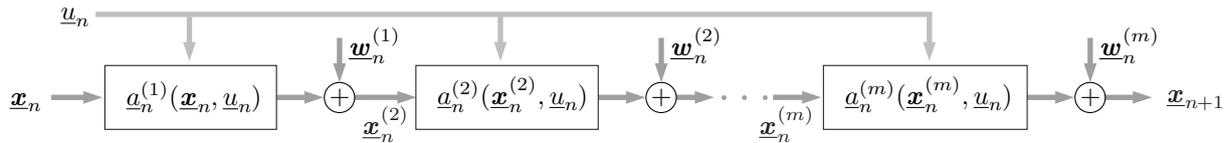


Abbildung 4.5: Modularisierung des vektorwertigen Systems $\underline{x}_{n+1} = \underline{a}_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n, \underline{w}_n)$.

unterteilt werden, wobei diese jeweils $(1 + d^x)$ -dimensional sind. Da der Approximationsaufwand einer Transitionsdichte deutlich überproportional mit deren Dimensionalität wächst, führt die Zerlegung in niederdimensionale Transitionsdichten zu einem deutlich verminderten Berechnungsaufwand [HBH06].

Ausgehend von der Zerlegbarkeit der Transitionsdichte $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ in d^x niederdimensionale Transitiondichten kann der benötigte Berechnungsaufwand noch weiter vermindert werden, indem das System $\underline{a}(\cdot)$ modularisiert ([5]) wird. Hierbei wird ähnlich wie bei Rao-Blackwellized Particle-Filtern [dF02] das System (2.1) wie in Abb. 4.5 dargestellt in eine Menge weniger komplexe Subsysteme unterteilt, welche kaskadiert das ursprüngliche System repräsentieren

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{a}(\underline{x}_n, \underline{u}_n, \underline{w}_n) = \underline{a}^{(m)}(\underline{x}_n^{(m)}, \underline{u}_n) + \underline{w}_n^{(m)} \\ \underline{x}_n^{(m)} &= \underline{a}^{(m-1)}(\underline{x}_n^{(m-1)}, \underline{u}_n) + \underline{w}_n^{(m-1)} \\ &\vdots \\ \underline{x}_n^{(2)} &= \underline{a}^{(1)}(\underline{x}_n^{(1)}, \underline{u}_n) + \underline{w}_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des prädizierten Zustands \underline{x}_{n+1} kann durch eine kaskadierte Prädiktion berechnet werden. Beginnend mit $\underline{x}_n^{(1)} = \underline{x}_n$ wird die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Hilfssystemzustand $\underline{x}_n^{(i)}$ für ein Subsystem $\underline{a}^{(i)}(\cdot)$ inferiert, was zum nächsten Hilfssystemzustand $\underline{x}_n^{(i+1)}$ führt, der dann wiederum als Grundlage für den nächsten Schritt dient.

Unter Umständen entstehen durch die Zerlegung in Subsysteme stochastische Abhängigkeiten der Hilfszufallsvariablen. Um dies zu berücksichtigen, können die Hilfszufallsvariablen entsprechend augmentiert werden.

Die Prädiktion für die einzelnen Subsysteme

$$\underline{x}_k^{(i+1)} = \underline{a}^{(i)}(\underline{x}_k^{(i)}, \underline{u}_k) + \underline{w}_k^{(i)}, \text{ für } i = 1, \dots, m$$

kann auf verschiedene Arten erfolgen. Neben den Techniken aus Abschnitt 4.1.1 und Abschnitt 4.1.2 kann im Falle eines linearen Subsystems die Inferenz auch ohne Approximation der Transitionsdichte durch eine Bank paralleler Kalman-Prädiktoren realisiert werden. So kann insbesondere bei linearen Subsystemen der benötigte Berechnungsaufwand, neben der Reduktion durch Unterteilung in einfacher zu berechnende Subsysteme, noch deutlich weiter reduziert werden.

Beispielszenario A 4.1: Modularisierung der Systemfunktion

Das Systemmodell (2.2) aus Beispielszenario A, welches den mobilen Roboter beschreibt, kann in die Subsysteme

$$\mathbf{x}_n^{(2)} = s \cdot \sin(\phi_n) + \mathbf{w}_n^x, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{x}_n^{(2)}, \quad (4.7)$$

$$\phi_{n+1} = \phi_n + u_n + \mathbf{w}_n^\phi \quad (4.8)$$

modularisiert werden. Der Hilfszustand $\mathbf{x}_k^{(2)}$ ist hier von ϕ_k stochastisch abhängig, wobei diese Abhängigkeit im Folgenden keine Berücksichtigung findet. Bei (4.7) und (4.8) handelt es sich um lineare Systeme. Daher kann hier zur Prädiktion sehr effizient eine Bank paralleler Kalman-Prädiktoren eingesetzt werden. Der nichtlineare Anteil (4.6) ist lediglich eindimensional und nicht von der Stellgröße u_n abhängig, sodass hier recht einfach eine Approximation der Transitionsdichte durchgeführt werden kann. Beispiele für approximierten Transitionsdichten von (4.6) sind in Abb. 4.3 bzw. in Abb. 4.4 dargestellt. ■

4.2 Gütefunktionsmodellierung zur effizienten Berechenbarkeit

Entscheidend für die Flexibilität und Einsetzbarkeit von Verfahren zur modell-prädiktiven Regelung sind unter anderem die Freiheiten, die bei der Modellierung der Gütefunktion (2.4) gegeben sind. Im Folgenden werden verschiedene Gütefunktionsrepräsentationen beschrieben, die zum einen ein hohes Maß an Flexibilität bei der Modellierung bieten, andererseits aber auch eine effiziente Auswertung der Gütefunktion erlauben. Dies ist keine triviale Forderung, da bei einer stochastischen Betrachtung des Systems nur unsichere Prädiktionen bzw. Schätzungen des Systemzustands vorliegen, sodass die Auswertung der Gütefunktion auch bei durch Zufallsvariablen beschriebenen Zuständen effizient, d. h. vorzugsweise geschlossen, durchführbar sein sollte.

Bei der Schrittgüte $g_n(\underline{\mathbf{x}}_n, \underline{u}_n)$ handelt es sich um einen Operator, der die kontinuierlichwertige Zufallsvariable $\underline{\mathbf{x}}_n$ und die diskrete reellwertige Stellgröße \underline{u}_n auf eine reelle Zahl abbildet, auf Basis derer dann eine Bewertung erfolgen kann. Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Darstellung davon ausgegangen, dass die Schrittgüte additiv zerlegbar ist

$$g_n(\underline{\mathbf{x}}_n, \underline{u}_n) = g_n^x(\underline{\mathbf{x}}_n) + g_n^u(\underline{u}_n). \quad (4.9)$$

Dies gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit, da auf Grund der endlichen Anzahl von diskreten Stellgrößen bei Bedarf jeweils unterschiedliche $g_{n,u_n}^x(\underline{\mathbf{x}}_n)$ verwendet werden können. Die terminale Schrittgüte $g_N(\underline{\mathbf{x}}_N)$ kann ebenso analog wie $g_n^x(\underline{\mathbf{x}}_n)$ modelliert werden. Da sich die Schrittgüten immer nur auf einen festen Zeitschritt beziehen, wird der Zeitindex im Folgenden weggelassen.

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, soll die Schrittgüte auch eine mittels einer Wahrscheinlichkeitsdichte beschriebene Zufallsvariable auf einen reellen Wert abbilden. Dies kann zum einen mittels Erwartungswertbildung aber auch auf Basis anderer Momente bzw. zentraler Momente, wie z. B. der Kovarianz, geschehen.

4.2.1 Polynomielle Schrittgüte

Von besonderer Bedeutung sind polynomielle und hier insbesondere quadratische Schrittgüten, wie sie z. B. auch bei der LQR-Regelung Anwendung finden [Ber00]. Bei diesen Gütefunktionen wird der polynomielle Abstand zu einem Sollwert $\underline{\check{x}}$ bzw. $\underline{\check{u}}$ gemäß

$$\hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}}) = (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}})^T (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}})$$

berechnet (Abb. 4.6(a)). Wird der Zustand $\underline{\mathbf{x}}$ durch eine Zufallsvariable beschrieben, handelt es sich bei $\hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}})$ ebenfalls um eine Zufallsvariable. Damit die Schrittgütefunktion auf eine reelle Zahl abbildet, kann eine erwartungswertbasierte Gütefunktionsdefinition $g^x(\underline{\mathbf{x}})$ verwendet werden. Bei einer derartigen Gütefunktionsdefinition gemäß

$$\begin{aligned} g^x(\underline{\mathbf{x}}) &= E_{\underline{\mathbf{x}}} \{ \hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}}) \} \\ &= E_{\underline{\mathbf{x}}} \left\{ (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}})^T (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}}) \right\} \end{aligned}$$

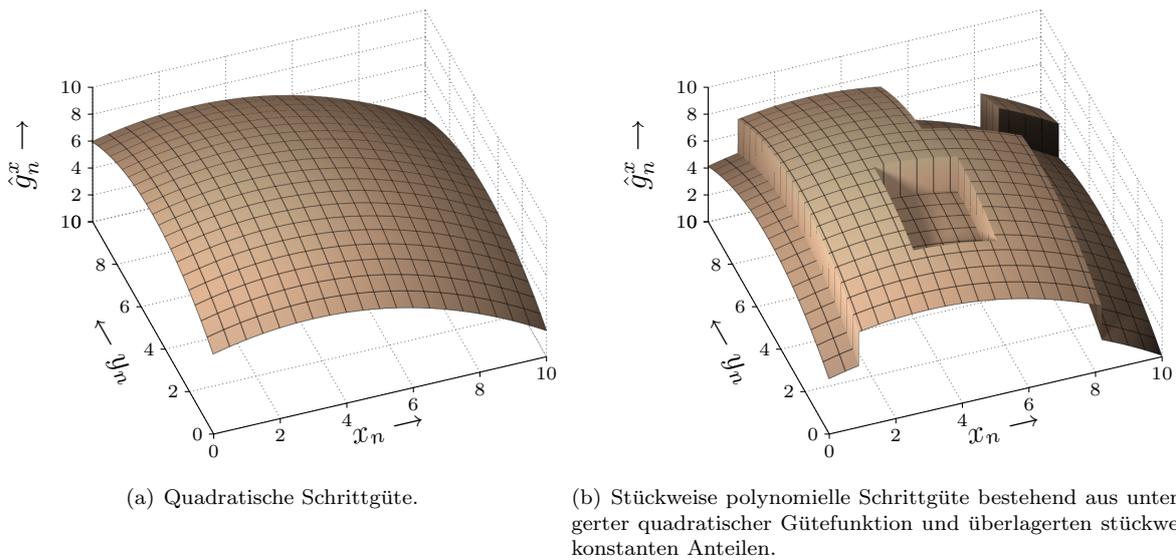
entspricht die sich ergebende Güte dem erwarteten polynomiellen Abstand zu einem Sollwert $\underline{\check{x}}$. Wird eines der Verfahren zur Zustandsprädiktion aus Abschnitt 4.1 verwendet, handelt es sich bei den Wahrscheinlichkeitsdichten des Systemzustands $\underline{\mathbf{x}}$ um achsenausgerichtete Gaußmischdichten $f(\underline{\mathbf{x}})$ mit L Komponenten. Dann kann (4.10) analytisch gelöst werden [5], da die Berechnung des erwarteten quadratischen Abstands lediglich der Berechnung eines zweiten verschobenen Moments entspricht. Diese Berechnung kann komponentenweise erfolgen

$$\begin{aligned} g^x(\underline{\mathbf{x}}) &= E_{\underline{\mathbf{x}}} \left\{ (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}})^T (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}}) \right\} \tag{4.10} \\ &= \text{spur } E_{\underline{\mathbf{x}}}^2 \{ (\underline{\mathbf{x}} - \underline{\check{x}}) \} \\ &= \text{spur } \sum_{i=1}^L \omega_i \left((\underline{\mu}_i - \underline{\check{x}})(\underline{\mu}_i - \underline{\check{x}})^T + \text{diag}(\underline{\sigma}_i)^2 \right) , \end{aligned}$$

da die Dimensionen entkoppelt sind und für das zweite (nicht zentrale) Moments $E^2\{\cdot\}$ einer Gaußmischdichte

$$E_{\underline{\mathbf{x}}}^2 \{ \underline{\mathbf{x}} \} = \sum_{i=1}^L \omega_i (\underline{\mu}_i^2 + \underline{\sigma}_i^2)$$

gilt [Han02].


Abbildung 4.6: Polynomielle Gütefunktionen.

Die Berechnung für Polynome höherer Ordnung sowie für lineare Funktionen kann analog erfolgen, da auch hier die Berechnung direkt auf die Berechnung verschobener Momente zurückgeführt werden kann. Auch diese Berechnungen können im Falle von Zufallsvariablen, welche mittels einer Gaußmischdichte repräsentiert werden, geschlossen durchgeführt werden [Han02].

4.2.2 Stückweise polynomielle Schrittgröße

Soll eine polynomielle Schrittgröße nicht einheitlich für \mathcal{X} definiert werden, so kann dies auch stückweise auf einem Intervall $[x_{min}, x_{max}]$ erfolgen (Abb. 4.6(b)).

Im eindimensionalen Fall sowie bei der Beschränkung auf achsenausgerichtete Hyperrechtecke kann die Berechnung des benötigten Erwartungswertes bei gaußmischverteilten Zufallsvariablen, wie es hier der Fall ist, für polynomielle $\hat{g}^x(x)$ ebenfalls geschlossen erfolgen. Im Eindimensionalen ist die Schrittgröße durch ein Polynom der Ordnung L mit dem Konstantenvektor \underline{a}_l definiert, wobei außerhalb des Intervalls $[x_{min}, x_{max}]$ die Schrittgröße den Wert Null annimmt

$$\hat{g}^x(x) = \begin{cases} \sum_{l=0}^L a_l \cdot x^l & \text{falls } x \in [x_{min}, x_{max}] \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \quad (4.11)$$

Ist der Zustand mit einer Zufallsvariable beschrieben, kann der Erwartungswert gebildet werden, um eine reellwertige Güte zu erlangen

$$g^x(\mathbf{x}) = E_{\mathbf{x}}\{\hat{g}^x(\mathbf{x})\} .$$

Für eine stückweise konstante Funktion

$$\hat{g}^x(x) = \begin{cases} d & \text{falls } x \in [x_{min}, x_{max}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt aus der Definition der Gauß'schen Fehlerfunktion

$$\text{erf}(x) = 2 \int_0^x \mathcal{N}(\tau; 1/2) d\tau$$

und der Berechnungsvorschrift für den Erwartungswert einer Funktion $\hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}})$, $\underline{\mathbf{x}} \sim f^x(\underline{\mathbf{x}})$ [PP02]

$$g^x(\underline{\mathbf{x}}) = E_{\underline{\mathbf{x}}}\{\hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}})\} = \int_{\mathcal{X}} f^x(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}}) d\underline{\mathbf{x}} ,$$

direkt

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}) &= d \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\sum_{i=1}^L \omega_i \mathcal{N}(x - \mu_i; \sigma_i^2) \right) dx \\ &= \frac{d}{2} \sum_{i=1}^L \omega_i \left(\text{erf} \left(\frac{x_{max} - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \text{erf} \left(\frac{x_{min} - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) . \end{aligned}$$

Die Berechnungsvorschriften für gaußverteilte Zufallsvariablen und Polynome bis fünfter Ordnung finden sich im Anhang C. Die Berechnung für Gaußmischdichten ergibt sich direkt durch Linearkombination.

Der eindimensionale Fall kann, wie im Folgenden beschrieben, auf den M -dimensionalen Fall erweitert werden, wobei hier die stückweise Definition auf Basis der mehrdimensionalen Erweiterungen von achsenausgerichteten Rechtecken, also achsenausgerichteten Hyperrechtecken, erfolgt. Diese Hyperrechtecke sind durch zwei Punkte $\underline{\mathbf{x}}_{min}$ und $\underline{\mathbf{x}}_{max}$ vollständig definiert. Für die Schrittgüte gilt also

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = E_{\underline{\mathbf{x}}}\{\hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}})\}$$

mit der mehrdimensionalen Erweiterung von (4.11)

$$\hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \sum_{l=0}^L \text{spur} \left(\text{diag}(\underline{\mathbf{a}}_l) \cdot (\text{diag}(\underline{\mathbf{x}}))^l \right) & \text{falls } \underline{\mathbf{x}}_{min} \leq \underline{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{x}}_{max} \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Da bei dieser Definition die Polynome keine Mischterme aufweisen gilt mit $\underline{a}_l^\top = [a_l^{(1)}, \dots, a_l^{(M)}]$ und $\underline{x}^\top = [x^{(1)}, \dots, x^{(M)}]$

$$\begin{aligned}
 g(\underline{\mathbf{x}}) &= \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{x}}} \{ \hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}}) \} \\
 &= \int_{x_{min}^{(1)}}^{x_{max}^{(1)}} \dots \int_{x_{min}^{(M)}}^{x_{max}^{(M)}} \left(\sum_{l=0}^L \text{spur}(\text{diag}(\underline{a}_l) \cdot \text{diag}(\underline{x}^l)) \right) dx^{(M)} \dots dx^{(1)} \\
 &= \int_{x_{min}^{(1)}}^{x_{max}^{(1)}} \dots \int_{x_{min}^{(M)}}^{x_{max}^{(M)}} \left(\sum_{l=0}^L \sum_{m=1}^M a_l^{(m)} (x^{(m)})^l \right) dx^{(M)} \dots dx^{(1)} \\
 &= \sum_{m=0}^M \int_{x_{min}^{(1)}}^{x_{max}^{(1)}} \dots \int_{x_{min}^{(M)}}^{x_{max}^{(M)}} \sum_{l=1}^L a_l^{(m)} (x^{(m)})^l dx^{(M)} \dots dx^{(1)} \\
 &= \sum_{m=0}^M \mathbb{E}_{\mathbf{x}^{(m)}} \{ \hat{g}^{x^{(m)}}(\mathbf{x}^{(m)}) \} ,
 \end{aligned}$$

d. h. die Berechnung der M -dimensionalen Gütefunktion kann dimensionsweise erfolgen.

Indem bestimmten Bereichen des Zustandsraums eine besonders niedrige Güte zugewiesen wird, kann durch die Verwendung stückweise definierter Gütefunktionen auch im hier betrachteten stochastischen Kontext eine Beschränkung des Zustandsraums erfolgen. Feste Beschränkungen, wie bei der deterministischen MPC üblich, sind aufgrund der stochastischen Modellierung der Systems hier nicht möglich, da die sichere Einhaltung dieser Beschränkungen nicht gewährleistet werden kann.

Beispielszenario B 4.1: Ziel- und Hindernismodellierung mit stückweise polynomieller Gütefunktion

Soll der Roboter in Beispielszenario B sich auf ein Ziel $[\check{x}, \check{y}]^\top$ zubewegen, so kann dies z. B. durch eine quadratische Gütefunktion mit Maximum bei $[\check{x}, \check{y}]^\top$, wie in Abb. 4.6(a) dargestellt, erfolgen. Hindernisse können durch Bereiche mit deutlich niedrigerer Güte modelliert werden (Abb. 4.6(b)).

4.2.3 Gaußmischschrittgüte

Eine weitere, sehr vielseitige Möglichkeit zur Modellierung der Schrittgüte besteht in der Verwendung von Gaußmischfunktionen zur Beschreibung von \hat{g} . Die Eigenschaft der Gaußmischfunktion, ein universeller Funktionsapproximator zu sein [MS96], kann hier ebenso wie bereits bei der Approximation der Transitionsdichte (Abschnitt 4.1.1) geschehen, genutzt werden. Hierbei gilt natürlich keinerlei Einschränkung bezüglich der Gewichte der Gaußmischfunktionen, diese können z. B. auch negativ sein.

Die notwendige Erwartungswertbildung zur Berechnung von $g(\underline{\mathbf{x}})$ kann geschlossen gelöst werden, falls der Zustand $\underline{\mathbf{x}}$ mit einer Gaußmischdichte $f(\underline{\mathbf{x}})$ dargestellt wird. Handelt es sich bei

\hat{g} um eine Gaußmischfunktion mit M Komponenten, gilt

$$\begin{aligned}
 g(\underline{x}) &= \mathbb{E}_{\underline{x}}\{\hat{g}^x(\underline{x})\} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} f(\underline{x}) \cdot \hat{g}^x(\underline{x}) \, d\underline{x} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^L \omega_i^{(f)} \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_i^{(f)}; \mathbf{C}_i^{(f)}) \cdot \sum_{j=1}^M \omega_j^{(\hat{g})} \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_j^{(\hat{g})}; \mathbf{C}_j^{(\hat{g})}) \, d\underline{x} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \omega_i^{(f)} \omega_j^{(\hat{g})} \cdot \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_i^{(f)}; \mathbf{C}_i^{(f)}) \cdot \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_j^{(\hat{g})}; \mathbf{C}_j^{(\hat{g})}) \, d\underline{x} \\
 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \omega_{ij} \underbrace{\int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_{ij}; \mathbf{C}_{ij}) \, d\underline{x}}_{=1} .
 \end{aligned}$$

Hierbei wird genutzt, dass es sich bei dem Produkt zweier Gaußfunktionen wiederum um eine (gewichtete) Gaußfunktion handelt. Für den Gewichtungsfaktor ω_{ij} gilt [NB03]

$$\omega_{ij} = \omega_i^{(f)} \omega_j^{(\hat{g})} \cdot \frac{\mathcal{N}(\underline{\mu}_i^{(f)}; \mathbf{C}_i^{(f)}) \cdot \mathcal{N}(\underline{\mu}_j^{(\hat{g})}; \mathbf{C}_j^{(\hat{g})})}{\mathcal{N}(\underline{\mu}_{ij}; \mathbf{C}_{ij})}$$

mit

$$\mathbf{C}_{ij} = \left(\left(\mathbf{C}_i^{(f)} \right)^{-1} + \left(\mathbf{C}_j^{(\hat{g})} \right)^{-1} \right)^{-1}$$

und

$$\underline{\mu}_{ij} = \mathbf{C}_j^{(\hat{g})} \left(\mathbf{C}_i^{(f)} + \mathbf{C}_j^{(\hat{g})} \right)^{-1} \underline{\mu}_i^{(f)} + \mathbf{C}_i^{(f)} \left(\mathbf{C}_i^{(f)} + \mathbf{C}_j^{(\hat{g})} \right)^{-1} \underline{\mu}_j^{(\hat{g})} ,$$

wobei die Kovarianzmatrix $\mathbf{C}_i^{(f)} = \text{diag}(\underline{\sigma}_i^{(f)})^2$ der Zustandsdichte $f(\underline{x})$ diagonal ist. Falls \hat{g} ebenfalls achsenausgerichtet ist, vereinfacht sich die Berechnung erheblich [5] und es gilt

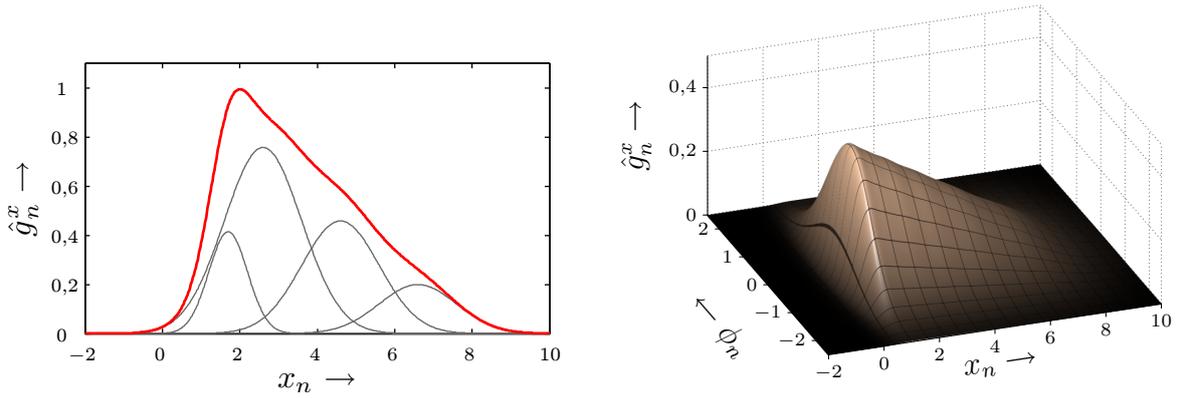
$$\omega_{ij} = \omega_i^{(f)} \omega_j^{(\hat{g})} \cdot \mathcal{N}(\underline{\mu}_i^{(f)} - \underline{\mu}_j^{(\hat{g})}; \text{diag}(\underline{\sigma}_i^{(f)})^2 + \text{diag}(\underline{\sigma}_j^{(\hat{g})})^2) .$$

4.2.4 Diracmischschrittgüte

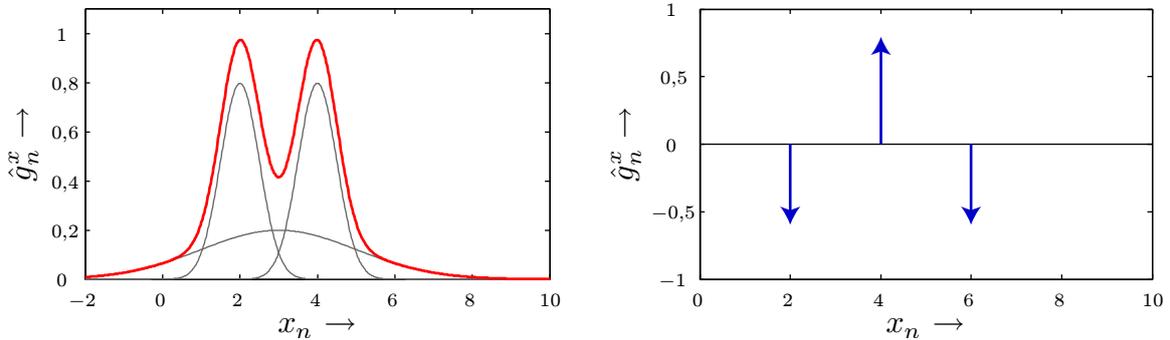
Durch die Modellierung von \hat{g} mittels einer Gaußmischfunktion können insbesondere weiche bzw. unsicherheitsbehaftete Gütefunktionen modelliert werden. Sollen hingegen auch bestimmte einzelne Zustände bewertet werden, kann dies mit einer Diracmischdistribution²

$$\hat{g}(\underline{x}) = \sum_{j=1}^M \omega_j^{(\hat{g})} \delta(\underline{x} - \underline{\mu}_j^{(\hat{g})}) ,$$

² engl.: Dirac mixture



(a) Eindimensionale asymmetrische Gaußmischschrittgüte bestehen aus vier Komponenten (grau). (b) Zweidimensionale Gaußmischschrittgüte bestehen aus sechs Komponenten.



(c) Eindimensionale bimodale Gaußmischschrittgüte bestehen aus drei Komponenten (grau). (d) Eindimensionale Diracmischschrittgüte bestehen aus drei Komponenten.

Abbildung 4.7: Gaußmisch- und Diracmischgütefunktionen.

also einer gewichteten Summe von Diracdistributionen, geschehen [6]. Auch hier kann die notwendige Erwartungswertbildung zur Berechnung von $g(\underline{x})$ geschlossen durchgeführt werden, falls der Zustand mit einer Gaußmischdichte $f(\underline{x})$ dargestellt wird

$$\begin{aligned}
 g(\underline{x}) &= \mathbb{E}_{\underline{x}}\{\hat{g}^x(\underline{x})\} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} f(\underline{x}) \cdot \hat{g}^x(\underline{x}) \, d\underline{x} \\
 &= \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^L \omega_i^{(f)} \mathcal{N}(\underline{x} - \underline{\mu}_i^{(f)}; \mathbf{C}_i^{(f)}) \cdot \sum_{j=1}^M \omega_j^{(\hat{g})} \delta(\underline{x} - \underline{\mu}_j^{(\hat{g})}) \, d\underline{x} \\
 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \omega_i^{(f)} \omega_j^{(\hat{g})} \cdot \mathcal{N}(\underline{\mu}_j^{(\hat{g})} - \underline{\mu}_i^{(f)}; \mathbf{C}_i^{(f)}),
 \end{aligned}$$

wobei hier die Ausblendeigenschaft der Diracdistribution verwendet wird.

Beispielszenario A 4.2: Zustandsbewertung mittels Gaußmisch- und Diracmischgütefunktionen

Zur Bewertung der Zustandskonfigurationen des Roboters können Gütefunktionen wie in Abb. 4.7 dargestellt verwendet werden. Soll sich der Roboter in einem bestimmten Abstand zu einer Wand (z. B. $\tilde{x} = 2$ mit $x^{\text{Wand}} = 0$) bewegen, wobei ein Unterschreiten des idealen Abstands als ungünstiger bewertet werden soll als ein Überschreiten, so kann eine asymmetrische Gütefunktion wie in Abb. 4.7(a) dargestellt kann verwendet werden. Durch eine zweidimensionale Erweiterung (Abb. 4.7(b)) kann auch noch der Winkel des Roboters zu der Wand mitberücksichtigt werden. Sind zwei Abstände gleich gut geeignet, dann kann eine Gütefunktion wie in Abb. 4.7(c) verwendet werden. Sollen bestimmte Abstände als besonders geeignet oder ungeeignet modelliert werden, kann dies auch durch eine Diracmischdistribution (Abb. 4.7(d)) erfolgen. ■

4.2.5 Schrittgüte auf Basis weiterer Momente

Neben den vier Modellierungsmethoden basierend auf dem gewichteten Erwartungswert kann es insbesondere in dem hier betrachteten stochastischen Kontext sinnvoll sein, auch Güten zu verwenden, welche explizit die Unsicherheit eines Zustands bewerten. Dies kann typischerweise auf Basis zentraler Momente, vor allem des zweiten zentralen Moments, der Kovarianz, geschehen. Die Hauptdiagonalelemente der Kovarianzmatrix geben hierbei die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert der Zufallsvariable an. Daher ist ein typisches Gütemaß zur Unsicherheitsbeschreibung die Spur der Kovarianzmatrix \mathbf{C} der Wahrscheinlichkeitsdichte $\underline{\mathbf{x}} \sim f(\underline{\mathbf{x}})$

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \text{spur} \{ \text{diag}(\underline{a}) \cdot \mathbf{C} \} ,$$

wobei mittels des Vektors \underline{a} eine Gewichtung erfolgen kann.

4.2.6 Kombination der Verfahren

Zur Modellierung der Schrittgüte kann auch eine Kombination der fünf beschriebenen Verfahren verwendet werden. Dies kann zum einen eine einfache Summenbildung aber auch jeglicher andere funktionale Zusammenhang sein, der die reellen Skalare verknüpft. Ferner könne die Gütefunktionen sowohl über mehrere Dimensionen des Zustandsvektors zusammen als auch dimensionsweise entkoppelt definiert sein, wobei letzteres oft eine deutliche Reduktion des Berechnungsaufwands bedeutet.

Der stellgrößenabhängige Anteil der Schrittgüte $g_n^u(\underline{u}_n)$ kann entweder wie $g_n^x(\underline{\mathbf{x}}_n)$ modelliert oder aber auch direkt tabelliert werden, da nur eine finite Anzahl von diskreten \underline{u}_n Verwendung findet.

4.3 Effiziente Auswertung des Suchbaums

Durch Kombination der in Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.2 vorgestellten Verfahren kann die probabilistische Auswertung der Schrittgüten in geschlossener Form erfolgen. Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, wie auf Basis dieser Verfahren effizient der Stellwert bestimmt werden kann.

4.3.1 Rekursive Berechnung

Wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben, wird bei der Open-Loop-Feedback-SNMPC zu jedem Zeitpunkt k (der im Folgenden fest ist und daher nicht mit angegeben wird) für jeden Zeitpunkt n innerhalb des Prädiktionshorizonts die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n^{\text{pl}|\underline{u}_{0:n-1}}$ des prädizierten Zustands $\underline{\boldsymbol{x}}_n^{\text{pl}|\underline{u}_{0:n-1}}$ berechnet, wobei hierzu die Verfahren aus Abschnitt 4.1 angewendet werden. Basierend auf diesen Wahrscheinlichkeitsdichten wird dann die Schrittgütefunktion $g(\underline{\boldsymbol{x}}_n)$ ausgewertet (Abschnitt 4.2). Diese Berechnungen erfolgen für alle möglichen n -schrittigen Stellgrößensequenzen $\underline{u}_{k,0:n-1}$, was zu dem Suchbaum in Abb. 4.8 (bzw. exemplarisch dargestellt in Abb. 4.1) führt. Jede Kante des Baums entspricht einem Stellwert, wobei die Kanten, welche von einem Knoten ausgehen, jeweils alternative Stellwerte repräsentieren. Ein Knoten des Baums entspricht einem durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n^{\text{pl}|\underline{u}_{0:n-1}}$ beschriebenen prädizierten Systemzustand $\underline{\boldsymbol{x}}_n^{\text{pl}|\underline{u}_{0:n-1}}$. Dieser Systemzustand ist von den zu ihm führenden Kanten, d. h. Stellwerten, abhängig, wobei eine Stellwertsequenz den Systemzustand eindeutig spezifiziert. Für jeden Knoten des Baumes, d. h. der zu ihm führenden Stellwertsequenz, kann auf Basis des ihm entsprechenden Systemzustands ein Gütewert $J_n(\underline{\boldsymbol{x}}_n^{\text{pl}|\underline{u}_{0:n-1}})$ berechnet werden, welcher der maximalen kumulativen Güte ab dem Zeitschritt n (inklusive diesem) entspricht.

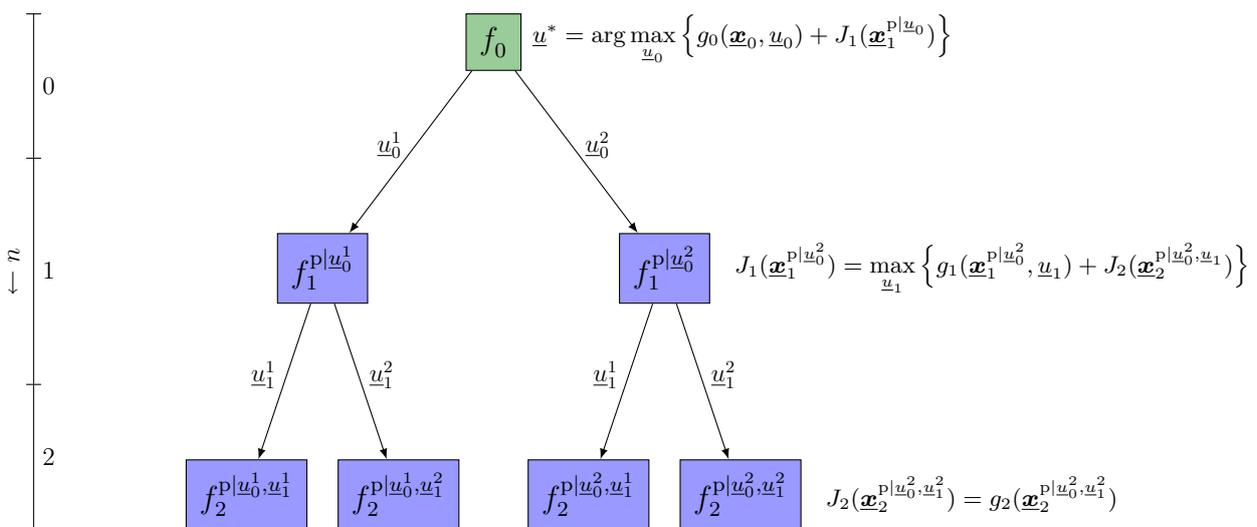


Abbildung 4.8: Suchbaum eines Open-Loop-Feedback-SNMPC-Reglers mit $N = 2$ Schritten und $|\mathcal{U}| = 2$ alternativen Stellgrößen. Kanten entsprechen alternativen Stellwerten, Knoten den sich ergebenden Zuständen. Exemplarisch ist jeweils für den rechten Knoten einer Ebene die Berechnungsvorschrift der kumulativen Güte bzw. beim Wurzelknoten die Berechnungsvorschrift für die Stellgröße angegeben.

Die Berechnung der Güterwerte kann zeitlich rückwärtsgerichtet rekursiv erfolgen

$$J_n(\underline{\mathbf{x}}_n) = \max_{\underline{u}_n} \left\{ g_n(\underline{\mathbf{x}}_n, \underline{u}_n) + J_{n+1}(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{pl}|\underline{u}_n}) \right\}, \quad n = N - 1 \dots 0, \quad (4.12)$$

wobei die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^{\text{pl}|\underline{u}_n}$ durch $f_{n+1}^{\text{pl}|\underline{u}_n}$ gegeben ist. Die Rekursion wird an den Blättern des Baums, d. h. im Endzeitschritt des Horizonts N mit der terminalen Schrittgüte initialisiert

$$J_N(\underline{\mathbf{x}}_N) = g_N(\underline{\mathbf{x}}_N).$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichten erfolgt auch hier zeitlich vorwärtsgerichtet gemäß (4.2). Die Stellgröße $\underline{u}^*(\underline{\mathbf{x}}_0)$ wird dann derart bestimmt, dass die bestmögliche kumulative Güte $J_1(\underline{\mathbf{x}}_1^{\text{pl}|\underline{u}_0})$ erzielt wird

$$\underline{u}_0^*(\underline{\mathbf{x}}_0) = \arg \max_{\underline{u}_0} \left\{ J_1(\underline{\mathbf{x}}_1^{\text{pl}|\underline{u}_0}) \right\} = \arg \max_{\underline{u}_0} \left\{ J_1(\underline{a}_0(\underline{\mathbf{x}}_0, \underline{u}_0) + \underline{\mathbf{w}}_0) \right\}.$$

Bei diesem Vorgehen zur Berechnung der OLF-Stellgröße müssen zum Erzeugen der Wahrscheinlichkeitsdichten an den Knoten $\sum_{n=1}^N |\mathcal{U}|^n$ Prädiktionsschritte durchgeführt werden. Ferner muss für jeden Knoten, d. h. $1 + \sum_{n=1}^N |\mathcal{U}|^n$ mal, die Schrittgüte berechnet werden. Würde die Berechnung nicht in einer Baumstruktur erfolgen, sondern würden die alternativen Stellwertsequenzen individuell berechnet werden, wären sogar $N \cdot |\mathcal{U}|^N$ Prädiktionen und $(N + 1) \cdot |\mathcal{U}|^N$ Schrittgüte-Auswertungen notwendig.

4.3.2 Uniform-Cost-Search

Werden Schrittgüten mit endlichen Maxima verwendet, kann eine teilweise deutliche Laufzeitverbesserung im Vergleich zur einfachen Baumsuche erzielt werden, indem der Baum mittels Uniform-Cost-Search (UCS) durchsucht wird [RN03, CMPS06]. Bei der UCS handelt es sich um eine modifizierte Dijkstra-Suche [Dij59]. Grundidee der UCS ist es, vorrangig Knoten mit hohen Schrittgütewerten auszuwerten, so dass möglichst schnell eine optimale Stellwertsequenz gefunden werden kann.

Analog zur zeitlich rückwärtsgerichteten kumulativen Güte (4.12) kann auch eine zeitlich vorwärtsgerichtete kumulative Güte

$$G_n(\underline{\mathbf{x}}_0, \underline{u}_{0:n}) = \sum_{i=0}^n g_i(\underline{\mathbf{x}}_i^{\text{pl}|\underline{u}_{0:i-1}}, \underline{u}_i), \quad n < N,$$

bzw.

$$G_N(\underline{\mathbf{x}}_0, \underline{u}_{0:N-1}) = g_N(\underline{\mathbf{x}}_N^{\text{pl}|\underline{u}_{0:N-1}}) + G_{N-1}(\underline{\mathbf{x}}_0, \underline{u}_{0:N-1}),$$

definiert werden, für die, bei Betrachtung des gesamten N -schrittigen Horizonts, gilt

$$\max_{\underline{u}_{0:N-1}} \{G_N(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:N-1})\} = J_0(\underline{x}_0) .$$

Für die optimale OLF Stellgröße gilt dann

$$\underline{u}^* = \arg \max_{\underline{u}_0} \max_{\underline{u}_{1:N-1}} \{G_N(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:N-1})\} .$$

Damit die UCS angewendet werden kann ist es notwendig, nicht-positive Schrittgüten zu gewährleisten. Dazu wird eine modifizierte kumulative Güte

$$G_n^{\text{UCS}}(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:n}) = G_n(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:n}) - n \cdot \hat{g}^{\max} . \quad (4.13)$$

verwendet, bei der die Schrittgüte um die maximal erreichbare Schrittgüte \hat{g}^{\max} vermindert wird. Rekursiv kann diese kumulative Güte gemäß

$$G_{n+1}^{\text{UCS}}(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:n+1}) = G_n^{\text{UCS}}(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:n}) + \underbrace{g_i(\underline{x}_{n+1}^{\text{pl}|\underline{u}_{0:n}}, \underline{u}_{n+1}) - \hat{g}^{\max}}_{\leq 0} \quad (4.14)$$

berechnet werden. Da sich G^{UCS} und G nur um einen konstanten, nicht vom Zustand oder Stellgröße abhängigen, additiven Term unterscheiden, kann anstatt von G auch G^{UCS} zur Berechnung der Stellgröße

$$\underline{u}^* = \arg \max_{\underline{u}_0} \max_{\underline{u}_{1:N-1}} \{G_N^{\text{UCS}}(\underline{x}_0, \underline{u}_{0:N-1})\}$$

verwendet werden.

Bei der UCS wird die Güte G^{UCS} als Priorität der Knoten des Suchbaums verwendet. Ausgehend vom Wurzelknoten werden die Prioritäten der Nachfolgeknoten $G_1^{\text{UCS}}(\underline{x}_0, \underline{u}_0)$ berechnet und in eine Prioritätswarteschlange \mathcal{Q} eingefügt. Danach wird immer der Knoten mit der höchsten Priorität aus \mathcal{Q} entfernt, worauf die Prioritäten von dessen Nachfolgeknoten berechnet und in \mathcal{Q} eingefügt werden. Dies geschieht so lange, bis ein Blattknoten, also ein Knoten mit $n = N$ aus \mathcal{Q} entnommen wird. Die zu diesem Knoten führende Stellwertsequenz entspricht der optimalen OLC-Stellwertsequenz $u_{i:N-1}^*$.

Durch die Wahl der Prioritätsfunktion (4.13) ist sichergestellt, dass die Güte von Nachfolgeknoten ($n+1$) maximal der des Vorgängerknotts (n) entspricht (4.14). Da bei der UCS immer derjenige Knoten mit der höchsten Priorität aus der Prioritätswarteschlange \mathcal{Q} zuerst entfernt wird, ist sichergestellt, dass der erste Blattknoten, der aus \mathcal{Q} entfernt wird, der Blattknoten mit höchster Priorität und somit auch mit höchster Güte G ist. Alle anderen Blattknoten haben höchstens die Priorität ihrer Vorgängerknotts, wobei diese wiederum nie eine höhere Priorität als der erste Blattknoten haben.

Durch Modifikation der Warteschlangen kann die UCS in eine Breiten- sowie in eine Tiefensuche überführt werden, bei denen dann aber der komplette Baum durchsucht werden muss.

Wird statt der Prioritätswarteschlange ein Stack verwendet, wird nach dem LIFO-Prinzip eine Tiefensuche durchgeführt. Wird statt der Prioritätswarteschlange \mathcal{Q} eine FIFO-Warteschlange benutzt, werden die Knoten Baumebene für Baumebene durchsucht, was einer Breitensuche entspricht.

Die Komplexität der Suche mittels UCS hängt stark von den sich ergebenden schrittgütenabhängigen Prioritäten ab. Im ungünstigsten Fall sind alle Prioritäten einer Ebene des Baums weitestgehend identisch was dazu führt, dass der gesamte Baum durchsucht werden muss. In diesem Fall führt die UCS zu keiner Reduktion des Berechnungsaufwands. Im günstigsten Fall wird auf jeder Ebene n nur ein Unterbaum untersucht. In diesem Fall sind lediglich $N \cdot |\mathcal{U}|$ Prädiktionsschritte und $(N + 1) \cdot |\mathcal{U}|$ Berechnungen der Schrittgüte erforderlich.

Unter Wahrung der Optimalität kann auch ein zustandsabhängiges $\hat{g}^{\max}(\mathbf{x}_n)$ verwendet werden, was typischerweise zu einer Reduktion des Berechnungsaufwandes führt, da in diesem Fall die Priorität G^{UCS} eine engere Schranke darstellt. Hierzu kann z. B. abhängig von der Schrittgütefunktion ermittelt werden, wie groß die maximale Güte innerhalb eines erreichbaren Bereichs der Gütefunktion ist, wohingegen sonst immer der gesamte Definitionsbereich der Gütefunktion zugrunde gelegt wird.

Ferner kann zur weiteren Reduktion des Berechnungsaufwandes der Parameters \hat{g}^{\max} durch den um g' vergrößerten Parameter $\hat{g}^{\max'}$ ersetzt werden

$$\hat{g}^{\max'} := \hat{g}^{\max} + g' .$$

Dies führt dazu, dass die Optimalität nicht mehr gewährleistet werden kann, wobei die so erreichbare kumulative Güte $G'_N(\mathbf{x}_0, \underline{u}'_{0:N})$ maximal $(N+1) \cdot g'$ kleiner als die optimale $G_N(\mathbf{x}_0, \underline{u}^*_{0:N})$ ist. Eine derartige approximative Lösung kann abhängig von der Wahl des g' oft zu einer deutlichen Reduktion des benötigten Berechnungsaufwandes führen, da die Berechnung abgebrochen wird, sobald eine Stellgrößensequenz $\underline{u}'_{0:N}$ gefunden ist, für die gilt

$$G'_N(\mathbf{x}_0, \underline{u}'_{0:N}) \geq G_N(\mathbf{x}_0, \underline{u}^*_{0:N}) - (N + 1) \cdot g' .$$

Zusammenfassung der Verfahren zur OLF-SNMPC

In diesem Kapitel wurden Verfahren zur effizienten Stellwertberechnung für die OLF-SNMPC vorgestellt. Da die OLF-SNMPC auf der Modellierung beruht, dass keine Zustandsrückführung vorliegt (open-loop), kann die Berechnung direkt durch eine stochastische Zustandsprädiktion für mögliche Stellwertsequenzen und eine probabilistische Auswertung der Gütefunktion erfolgen.

Zur effizienten Zustandsprädiktion wurden zwei alternative Verfahren basierend auf der Approximation der Systemtransitionsdichte beschrieben. Beide Verfahren gestatten eine analytische Prädiktion mit konstanter Komplexität über mehrere Zeitschritte. Das erste Verfahren, welches auf der Approximation der Systemtransitionsdichte mit Gaußmischdichten basiert, führt

zu einer sehr hohen Approximationsqualität, gestattet aber nur die Berücksichtigung zeitinvarianter Systeme, da eine aufwändige Approximation der Systemtransitionsdichte notwendig ist. Das zweite Verfahren, bei welchem die Systemtransitionsdichte mittels einer hybriden Dichte approximiert wird, erfordert diese Approximation nicht, weshalb auch zeitvariante Systeme berücksichtigt werden können. Als Erweiterung beider Verfahren wird die so genannte Modularisierung beschrieben, welche es gestattet, das Gesamtsystemmodell in einfache Submodelle zu zerlegen, um so auch höherdimensionale Systeme und Systeme mit linearem Anteil effizient behandeln zu können.

Zur probabilistischen Auswertung der Gütefunktion wurden verschiedene sich ergänzende Modellierungsalternativen der Gütefunktion vorgestellt. Hierzu zählen zum einen erwartungswertbasierte Gütefunktionen auf Basis von Gaußmischfunktionen, Diracmischdistributoren und (stückweise) polynomiellen Funktionen sowie zum anderen auch unsicherheitsbeschreibende Gütefunktionen auf Basis zentraler Momente. Neben einer größtmöglichen Freiheit bei der Modellierung gestatten die vorgestellten Methoden in Verbindung mit den Verfahren zur Zustandsprädiktion eine vollständige analytische Auswertung des OLF-SNMPC-Optimierungsproblems.

Ferner wurde beschrieben, wie durch ein rekursives Vorgehen sowie die Verwendung der Uniform-Cost-Search der Berechnungsaufwand weiter reduziert werden kann.

Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen

In diesem Kapitel werden Techniken zur Berechnung optimaler Stellwerte der Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen (CLF-P, Abschnitt 2.5.2) vorgestellt. Diese Techniken basieren auf der dynamischen Programmierung, wobei hier wiederum die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Verfahren zur Zustandsprädiktion mittels Transitionsdichtenapproximation sowie die in Abschnitt 4.2 vorgestellten Gütefunktionsmodellierungen zugrunde gelegt werden.

Zunächst wird in Abschnitt 5.1 beschrieben, wie die dynamische Programmierung zur Lösung des betrachteten Problems angewendet werden kann. In Abschnitt 5.2 und Abschnitt 5.3 werden dann zwei Verfahren zur approximativen dynamischen Programmierung vorgestellt. In Abschnitt 5.4 wird das Kapitel mit einer kurzen Aufwandsabschätzung abgeschlossen.

5.1 Berechnung mittels dynamischer Programmierung

Im Gegensatz zur OLF-Regelung, bei der davon ausgegangen wird, dass innerhalb des Prädiktionshorizontes keine Zustandsrückführung vorliegt, basiert die Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit direkt zugänglichen Zuständen auf der Annahme, dass zu jedem Zeitschritt innerhalb des Prädiktionshorizontes der Zustandsvektor vollständig und sicher bekannt ist und zur Regelung verwendet wird. Dies spiegelt sich darin wieder, dass die Optimierung (2.7) nicht über eine, abgesehen vom Initialzustand $\underline{x}_{k,0}$, zustandsunabhängige Stellwertsequenz $u_{k,1:N-1}$ erfolgt, sondern über eine Regelgesetzsequenz $\underline{v}_{k,1:N-1}(\underline{x}_{k,1:N-1})$, welche einem Zustand einen Stellwert zuweist (2.6). Die Berechnung des optimalen Stellwerts bei der CLF-P kann somit auch nicht direkt durch eine vorwärtsgerichtete Prädiktion für alle möglichen Stellwertsequenzen realisiert werden, da bei diesem Vorgehen nicht berücksichtigt werden würde, dass in jedem Schritt innerhalb des Horizonts der Stellwert anhand des Regelgesetzes $\underline{v}_{k,n}(\underline{x}_{k,n})$ abhängig vom bekannten Zustand gewählt wird, also eine Zustandsrückführung stattfindet.

Im Folgenden werden wie in Abschnitt 4.2.1 - 4.2.4 beschrieben erwartungswertbasierte Schritt-
güten betrachtet. Da die Gütefunktion (2.4) ferner über der Zeit kumulativ ist, kann die

maximale kumulative Güte

$$\begin{aligned}
 J_{k,n}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}) &= \max_{\underline{\nu}_{k,n:N-1}} \left\{ g_N(\underline{\mathbf{x}}_{k,N}) + \sum_{m=n}^{N-1} g_m(\underline{\mathbf{x}}_{k,m}, \underline{\nu}_{k,m}(\underline{\mathbf{x}}_{k,m})) \right\} \\
 &= \max_{\underline{\nu}_{k,n:N-1}} \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{x}}_{k,n:N}} \left\{ \hat{g}_N(\underline{\mathbf{x}}_{k,N}) + \sum_{m=n}^{N-1} \hat{g}_m(\underline{\mathbf{x}}_{k,m}, \underline{\nu}_{k,m}(\underline{\mathbf{x}}_{k,m})) \right\} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

sehr effizient mittels dynamischer Programmierung (DP) wie in Abb. 5.1 dargestellt, schrittweise rückwärts berechnet werden. Unter Ausnutzung des Bellman'schen Optimalitätsprinzips [Bel57] gilt

$$\begin{aligned}
 J_{k,N}(\underline{\mathbf{x}}_{k,N}) &= \hat{g}_N(\underline{\mathbf{x}}_{k,N}), \quad (5.2) \\
 J_{k,n}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}) &= \max_{\underline{u}_{k,n}} \left\{ \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{u}_{k,n}) + \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{x}}_{k,n+1}} \{ J_{k,n+1}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n+1}) | \underline{\mathbf{x}}_{k,n} \} \right\} \\
 &= \max_{\underline{u}_{k,n}} \left\{ \underbrace{\hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{u}_{k,n}) + \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{w}}_{k,n}} \{ J_{k,n+1}(\underline{a}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{u}_{k,n}) + \underline{\mathbf{w}}_{k,n}) \}}_{=: V_{n,k}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{u}_{k,n})} \right\}, \quad n = N-1, \dots, 0,
 \end{aligned}$$

wobei hier rekursiv auf Basis der Schrittgüte \hat{g}_n und der Gütefunktion $J_{k,n+1}$ des nächsten Zeitschritts $n+1$ die maximale erwartete Güte für den aktuellen Zeitschritt n berechnet wird, was der Gütefunktion $J_{k,n}$ entspricht.

Für einen beliebigen (auch als Zufallsvariable vorliegenden) Zustand $\underline{\mathbf{x}}_{k,0}$ kann dann auf dieser Basis sehr einfach gemäß

$$\begin{aligned}
 \underline{u}_{k,0}^*(\underline{\mathbf{x}}_{k,0}) &= \arg \max_{\underline{u}_{k,0}} \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{w}}_{k,0}} \left\{ \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_{k,0}, \underline{u}_{k,0}) + \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{x}}_{k,1}} \{ J_{k,1}(\underline{\mathbf{x}}_{k,1}) | \underline{\mathbf{x}}_{k,0} \} \right\} \\
 &= \arg \max_{\underline{u}_{k,0}} \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{w}}_{k,0}} \left\{ \hat{g}_0(\underline{\mathbf{x}}_{k,0}, \underline{u}_{k,0}) + \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{w}}_{k,0}} \{ J_{k,1}(\underline{a}(\underline{\mathbf{x}}_{k,0}, \underline{u}_{k,0}) + \underline{\mathbf{w}}_{k,0}) \} \right\} \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

der optimale CLF-P-Stellwert berechnet werden.

Damit die schrittweise Berechnung der dynamischen Programmierung angewendet werden kann, muss die Gütefunktion $J_{k,n}$ abhängig vom Zustand $\underline{\mathbf{x}}_{k,n} \in \mathcal{X}$ dargestellt und berechnet werden. Bei den hier betrachteten zustandskontinuierlichen Systemen kann $J_{k,n}$ nicht wie bei der zustandsdiskreten dynamischen Programmierung einfach tabelliert werden, sondern es muss eine kontinuierliche Darstellung gefunden werden. Da durch die Nichtlinearitäten der hier betrachteten Systemen in der Regel keine exakte geschlossene Darstellung der Gütefunktion gefunden werden kann besteht lediglich die Möglichkeit, die Gütefunktion zu approximieren¹.

Die Berechnung der Gütefunktion unter Zuhilfenahme von (5.2) besteht aus zwei Schritten:

1. Berechnung der maximalen kumulativen stellwertabhängigen Gütefunktion $V_{n,k}(\underline{\mathbf{x}}_{k,n}, \underline{u}_{k,n})$,
2. Maximierung über $\underline{u}_{k,n}$.

¹ engl.: value function approximation

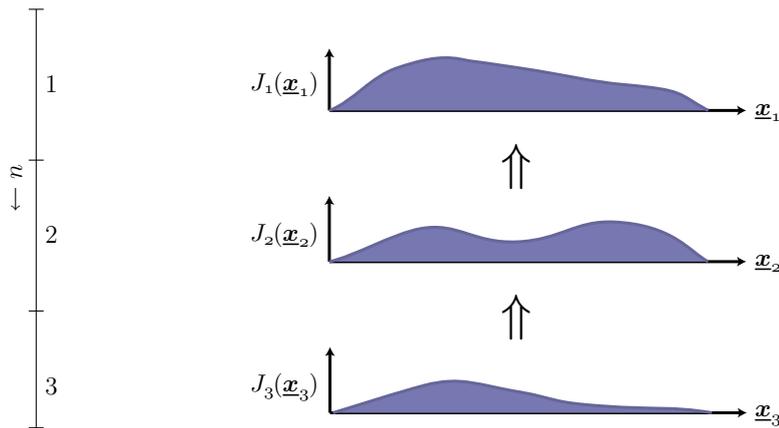


Abbildung 5.1: Bei dynamischer Programmierung wird die Gütefunktion rekursiv berechnet, wobei aufgrund des stochastischen Charakters des Problems die Berechnung über den Horizont rückwärtsgerichtet erfolgen muss.

Im Folgenden werden approximative Verfahren zur effizienten Durchführung dieser beiden Schritte beschrieben, wobei dazu unter anderem die bereits vorgestellten Verfahren zur effizienten Zustandsprädiktion (Abschnitt 4.1) sowie zur Gütefunktionsmodellierungen (Abschnitt 4.2) angewendet werden.

Zunächst wird das Vorgehen unter Verwendung der Transitionsdichtenapproximation mittels Gaußmischdichten (siehe Abschnitt 4.1.1) und dann unter Verwendung der Transitionsdichtenapproximation mittels hybrider Dichten (siehe Abschnitt 4.1.2) beschrieben. Da die Berechnungen für einen festen Zeitpunkt k durchgeführt werden, wird im Folgenden dieser Index nicht mit angegeben.

5.2 Gütefunktionsapproximation bei Gaußmischtransitionsdichten

In diesem Abschnitt wird analog zu [7] die Gütefunktionsapproximation basierend auf der Transitionsdichtenapproximation mittels achsenausgerichteter Gaußmischdichten beschrieben.

5.2.1 Berechnung der stellwertabhängigen Gütefunktion

Da die Auswertung der Schrittgüte $\hat{g}_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ für bekannte, d. h. feste, \underline{x}_n kein Problem darstellt, besteht die Herausforderung bei der Berechnung der stellwertabhängigen Gütefunktion $V_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ in der Berechnung des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n\}$.

Wenn das System (4.1) mit einer Systemtransitionsdichte $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1} | \underline{x}_n)$ beschrieben wird, kann der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n\}$ unter einem analogen Vorgehen zu (4.2) gemäß

$$\mathbb{E}_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n\} = \int_{\mathcal{X}} \tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1} | \underline{x}_n) \cdot J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) d\underline{x}_{n+1} \quad (5.4)$$

berechnet werden. Wird nun die Transitionsdichte $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben mit einer achsenausgerichteten Gaußmischdichte $f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ mit L Komponenten approximiert, dann erhält man so eine approximative Darstellung für $V_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$

$$\begin{aligned} V_n^a(\underline{x}_n, \underline{u}_n) &= \hat{g}_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n) + \mathbb{E}_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})|\underline{x}_n\} \\ &= \hat{g}_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n) + \int_{\mathcal{X}} f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n) \cdot J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) \, d\underline{x}_{n+1} \\ &\approx V_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n) . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wenn $J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})$ eine der in Abschnitt 4.2 vorgestellten Beschreibungsformen hat, dann kann die Berechnung von (5.5) geschlossen erfolgen, da es sich hier bei $f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ um eine achsenausgerichtete Gaußmischdichte handelt. Die Multiplikation und Marginalisierung kann wie in Abschnitt 4.2 beschrieben erfolgen. Bei $\mathbb{E}_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})|\underline{x}_n\}$ handelt es sich unabhängig von der Darstellung von $J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})$ auf Grund der Achsenausgerichtetheit der Komponenten von $f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ immer um eine Gaußmischdichte mit wiederum L Komponenten.

Die Berechnung der stellwertabhängigen Gütefunktion erfolgt bei einer modularisierten Systemfunktion (Abschnitt 4.1.3) analog, was im nachfolgenden Beispiel illustriert wird.

Beispielszenario A 5.1: Berechnung des bedingten Erwartungswerts für die Gütefunktionsapproximation bei modularisierter Systemfunktion

Durch Einsetzen der modularisierten Systemfunktion (4.6) - (4.8) aus Beispielszenario A (mit $s = 1$ und $\mathbf{w}_n^\phi = 0$) in (5.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})|\underline{x}_n\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(x_{n+1}, \phi_{n+1}|x_n, \phi_n) \cdot J_{n+1}(x_{n+1}, \phi_{n+1}) \, dx_{n+1} \, d\phi_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} J_{n+1}(x_{n+1}, \phi_{n+1}) \\ &\quad \cdot \delta(x_n + x_n^{(2)} - x_{n+1}) \cdot \delta(\phi_n + u_n - \phi_{n+1}) \cdot \tilde{f}_{\sin}^T(x_n^{(2)}|\phi_n) \, dx_n^{(2)} \, dx_{n+1} \, d\phi_{n+1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} J_{n+1}(x_n + x_n^{(2)}, \phi_n + u_n) \cdot \tilde{f}_{\sin}^T(x_n^{(2)}|\phi_n) \, dx_n^{(2)} . \end{aligned}$$

Bei $\tilde{f}_{\sin}^T(x_n^{(2)}|\phi_n)$ handelt es sich um die Transitionsdichte des nichtlinearen Subsystems (4.6), welches mit einer achsenausgerichteten Gaußmischdichte wie in Abb. 4.3 dargestellt approximiert werden kann. $\delta(\phi_n + u_n - \phi_{n+1})$ und $\delta(x_n + x_n^{(2)} - x_{n+1})$ sind die Transitionsdichten der linearen Subsysteme (4.7) bzw. (4.8). Da $J_{n+1}(x_n + x_n^{(2)}, \phi_n + u_n)$ lediglich einer Verschiebung von $J_{n+1}(x_{n+1}, \phi_{n+1})$ entspricht, kann die Berechnung auch im hier dargestellten modularisierten Fall, wie im nicht modularisierten Fall, geschlossen erfolgen. ■

5.2.2 Maximierung

Die Berechnung der maximalen kumulativen Gütefunktion ausgehend von einer endlichen Menge stellwertabhängiger Gütefunktionen $V_n^a(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ stellt ein nicht unerhebliches Problem dar, wenn Gaußmischtransitionsdichten verwendet werden, da es sich hier um die Berechnung der Maximumfunktion einer Menge von Gaußmischfunktionen handelt, die aus Komponenten mit unterschiedlichen Gewichten, Mittelwerten und Varianzen bestehen. Hierzu ist unseres Wissens keine geschlossene Lösung bekannt.

Daher wird im Folgenden ein Verfahren zur approximativen Berechnung der maximalen Gütefunktion $J_n(\underline{x}_n)$ vorgestellt, wobei die approximative maximale Gütefunktion $J_n^a(\underline{x}_n)$ durch Gaußmischfunktionen dargestellt werden soll. Durch diese Darstellung ist gewährleistet, dass die maximale erwartete stellwertabhängige Gütefunktion $V_{n-1}^a(\underline{x}_{n-1}, \underline{u}_{n-1})$ im nächsten (rückwärtsgerichteten) Zeitschritt $n - 1$ wiederum geschlossen berechnet werden kann. Da auch eine gütemaßbasierte optimale Approximation von $J_n(\underline{x}_n)$ mittels einer Gaußmischfunktionen (z. B. unter einem quadratischen Abstandsgütemaß) eine sehr aufwändige, hochdimensionale nichtlineare Optimierung darstellt, deren Gütemaß zusätzlich auch nur numerisch berechnet werden kann, wird im Folgenden eine suboptimale aber recht effiziente Methoden zur Reapproximation vorgestellt.

Ein sehr einfaches Verfahren besteht darin, den relevanten Zustandsraum mit Gaußfunktionen, deren Mittelwerte und Varianzen fest gewählt werden, als radiale Basisfunktionen abzudecken. Man kann dann die Gütefunktion an den Mittelwerten der Gaußfunktionen auswerten und die Gewichte der Gaußfunktionen so wählen, dass an diesen Punkten die wahren Werte und die der approximierenden Gütefunktion übereinstimmen. Die dazu benötigten Berechnungen können geschlossen durchgeführt werden [NB03]. Die Approximation der Gütefunktion ist aber durch die feste und nur bedingt voroptimierbare Struktur der verwendeten Basisfunktionen oft deutlich suboptimal [5] und durch die hohe Anzahl an benötigter Basisfunktionen sehr aufwändig. Von diesem Verfahren ausgehend kann ein Verfahren abgeleitet werden, welches aufgrund einer dynamischen Anpassung aller Parameter (Mittelwerte, Varianzen und Gewichte) der Gaußmischfunktionen deutlich bessere Ergebnisse liefert [7]. Das Verfahren besteht aus den folgenden Schritten:

A. *Berechnung der Summe der $V_n^a(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ für alle $\underline{u}_n \in \mathcal{U}$*

$$V_n^\Sigma(\underline{x}_n) := \sum_{\mathcal{U}} V_n^a(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$$

B. *Reduktion der Anzahl der Komponenten von $V_n^\Sigma(\underline{x}_n)$*

$$V_n^{\Sigma, red}(\underline{x}_n) := \text{reduce}(V_n^\Sigma(\underline{x}_n))$$

Dies kann z. B. mit dem Verfahren von Salmond [Sal90] geschehen. Zur weiteren Reduktion der Komplexität sollte dieses Verfahren derart erweitert sein, dass die Komponenten der resultierenden Gaußmischfunktion achsenausgerichtet sind.

C. Berechnung der Maxima von $V_n^a(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ an den Mittelwerten $\underline{\mu}_{n,i}^{\Sigma,red}$ der Komponenten von $V_n^{\Sigma,red}$

$$V_n^{\max}(\underline{\mu}_n^{\Sigma,red}) := \max_{\underline{u}_n} V_n^a(\underline{\mu}_{n,i}^{\Sigma,red}, \underline{u}_n)$$

D. Erzeugen der neuen maximalen kumulativen Gütefunktion $J_n^a(\underline{x}_n)$

Hierbei handelt es sich um eine Gaußmischfunktion, deren Komponenten in Mittelwert und Kovarianzen den Komponenten von $V_n^{\Sigma,red}$ entsprechen. Die Gewichte der Komponenten werden derart gewählt, dass gilt

$$J_n^a(\underline{\mu}_n^{\Sigma,red}) \stackrel{!}{=} V_n^{\max}(\underline{\mu}_n^{\Sigma,red}),$$

d. h. die neue maximale kumulative Gütefunktion an den Mittelpunkten ihrer Komponenten das korrekte Maximum annimmt. Die Wahl der Gewichte kann durch Lösen eines linearen Gleichungssystems erfolgen, wobei die notwendigen Formeln hierzu z. B. in [NB03] angegeben sind.

In den ersten beiden Schritten wird eine geeignete, an die Gütefunktion angepasste Abdeckung des relevanten Zustandsraums mit Basisfunktionen gefunden. Durch die Anwendung des Komponenten-Reduktionsverfahrens im Schritt B wird sichergestellt, dass die Anzahl der Basisfunktionen, d. h. der Komponenten der Gaußmischfunktion, fest ist und somit eine effiziente Berechnung insbesondere der Gewichte in Schritt D gewährleistet ist. Implizit werden so auch die Kovarianzmatrizen der Basisfunktionen angepasst. Ferner wird auch erreicht, dass nur Bereiche des Zustandsraums mit Basisfunktionen abgedeckt sind, an denen die Gütefunktion nicht Null ist. Somit wird eine Abdeckung des Zustandsraums gefunden, welche die Eigenschaften der Gütefunktion reflektiert und welche nicht auf einen bestimmten Bereich oder eine vorbestimmte Struktur wie z. B. ein Grid beschränkt ist, wie in [NB03] beschrieben. Basierend auf der so gefundenen Diskretisierung kann an den einzelnen Punkten einfach die Maximierung über die endliche Menge diskreter Stellwerte in Schritt C erfolgen. Schließlich wird im Schritt D eine Gaußmischdichte berechnet, welche die maximalen kumulativen Gütefunktion $J_n(\underline{x}_n)$ approximiert. Diese Gütefunktion kann direkt im nächsten (rückwärtsgerichteten) Zeitschritt der dynamischen Programmierung verwendet werden.

Durch die Kombination der beiden Verfahren aus Abschnitt 5.2.1 und Abschnitt 5.2.2 kann die Gütefunktionsberechnung mittels dynamischer Programmierung (5.1) effizient durchgeführt werden, wobei hier zur Gütefunktionsapproximation eine problemspezifisch angepasste Gaußmischdichte verwendet wird.

5.3 Gütefunktionsapproximation bei hybriden Transitionsdichten

Als Alternative zur sehr hochqualitativen Transitionsdichtenapproximation mit einer Gaußmischdichte kann diese auch mit einer hybriden Dichte, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben,

approximiert werden. Bei dieser Approximation entfällt die aufwendige Optimierung der approximativen Transitionsdichte und es können somit auch höherdimensionale sowie zeitvariante Systeme direkt behandelt werden. Im Folgenden wird analog zu [6] das Vorgehen bei hybriden Transitionsdichten beschrieben.

5.3.1 Berechnung der stellwertabhängigen Gütefunktion

Wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, besteht die Herausforderung bei der Berechnung der maximalen erwarteten stellwertabhängigen Gütefunktion $V_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ in der Berechnung des bedingten Erwartungswerts $E_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n\}$.

Wird die Systemtransitionsdichte $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1} | \underline{x}_n)$ wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben mit einer hybriden Dichte $f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1} | \underline{x}_n)$ mit L Komponenten approximiert, dann gilt unter Verwendung von (5.4) für den bedingten Erwartungswert

$$\begin{aligned}
 & E_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n\} \\
 & \approx E_{\underline{x}_{n+1}} \{J_{n+1}^a(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n\} \\
 & = \int_{\mathcal{X}} f_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1} | \underline{x}_n) \cdot J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) d\underline{x}_{n+1} \\
 & = \int_{\mathcal{X}} \sum_{i=1}^L \omega_{i, \underline{u}_n} \cdot \delta(\underline{x}_n - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n)}) \cdot \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}; \mathbf{C}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}) \cdot J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) d\underline{x}_{n+1} \\
 & = \sum_{i=1}^L \omega_{i, \underline{u}_n} \cdot \delta(\underline{x}_n - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n)}) \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}; \mathbf{C}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}) \cdot J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) d\underline{x}_{n+1}}_{=: z_{i, \underline{u}_n}} \\
 & = \sum_{i=1}^L \omega_{i, \underline{u}_n} z_{i, \underline{u}_n} \cdot \delta(\underline{x}_n - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n)}) \\
 & =: K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n) .
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Der bedingte Erwartungswert wird also mit einer stellwertabhängigen Diracmischdistribution $K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ mit L Komponenten approximiert.

Die Berechnung von z_{i, \underline{u}_n} und somit auch von (5.6) kann geschlossen erfolgen, wenn $J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})$ mit einer der Schrittgütedarstellungen bzw. ihren Linearkombinationen gemäß Abschnitt 4.2.1 - 4.2.4 approximiert wird. Die Berechnung von z_{i, \underline{u}_n} entspricht dann jeweils den dort angegebenen Erwartungswertbildungen, wobei $\hat{g}(\underline{x})$ durch $J(\underline{x})$ zu ersetzen ist.

5.3.2 Maximierung

Werden hybride Transitionsdichten verwendet (Abschnitt 4.1.2), so besteht der zu maximierende Anteil der Gütefunktion aus der Summe einer Diracmischdistribution und einem vom Zustand unabhängigen Anteil. Sofern die Komponenten der Diracmischdistributionen jeweils

identische Mittelwerte aufweisen, was bei der Transitionsdichtenapproximation problemlos sichergestellt werden kann, ist die Maximierung dieses Anteils trivial, da die Maximierung dann komponentenweise geschehen kann. Der zustandsunabhängige Anteil der Transitionsdichte kann sehr einfach an den Mittelwerten der Komponenten der Diracmischdistribution diskretisiert werden, was dann die gemeinsame Maximierung gestattet.

Im Folgenden werden insbesondere Schrittgüten (4.9) betrachtet, deren stellwertabhängiger Anteil lediglich additiv mit dem zustandsabhängigen Anteil verkoppelt ist, was zu der Maximierung

$$J_n^a(\underline{x}_n) = \max_{\underline{u}_n} \left\{ V_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n) \right\} = \max_{\underline{u}_n} \left\{ \hat{g}_n^x(\underline{x}_n) + \hat{g}_n^u(\underline{u}_n) + K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n) \right\} \quad (5.7)$$

führt.

Die zustandsabhängige Schrittgüte $\hat{g}_n^x(\underline{x}_n)$ hat keinen Einfluss auf die Maximierung, da sie unabhängig vom Stellwert \underline{u}_n ist. Bei $K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ handelt es sich gemäß (5.6) um eine vom kontinuierlichen Zustand \underline{x}_n und dem diskreten Stellwert \underline{u}_n abhängigen Diracmischdistribution. Daher ist eine Maximierung dieses Anteils bezüglich \underline{u}_n einfach möglich, sofern die Positionen $\underline{\mu}_i^{(n)}$ der einzelnen Diracdistributionen identisch für alle \underline{u}_n sind. In diesem Fall kann die Maximierung komponentenweise erfolgen.

Falls es sich bei $\hat{g}_n^u(\underline{u}_n)$ um eine beliebige Funktion handelt, kann eine Maximierung der Summe von $K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ und $\hat{g}_n^u(\underline{u}_n)$ nicht direkt erfolgen. Da aber $\hat{g}_n^u(\underline{u}_n)$ nicht von \underline{x}_n abhängt und somit über \underline{x}_n konstant ist kann $\hat{g}_n^u(\underline{u}_n)$ sehr einfach mit einer Diracmischdistribution approximiert werden. Wenn nun diese Diracmischdistribution so gewählt wird, dass ihre Komponenten an der selben Position wie die Komponenten von $K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ liegen, kann die Maximierung wiederum komponentenweise erfolgen.

Wenn $\tilde{f}_{\underline{u}_n}^T(\underline{x}_{n+1}|\underline{x}_n)$ und $\hat{g}_n^u(\underline{u}_n)$ wie beschrieben approximiert werden, besteht $J_n^a(\underline{x}_n)$ aus der Summe einer Diracmischdistribution, welche aus der Maximierung von $\hat{g}_n^u(\underline{u}_n) + K_n(\underline{x}_n, \underline{u}_n)$ resultiert, und der Schrittgüte $\hat{g}_n^x(\underline{x}_n)$, welche eine der in Abschnitt 4.2.1 - 4.2.4 beschriebenen Formen hat. Dadurch kann die Berechnung von $E_{\underline{x}_{n+1}} \{ J_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) | \underline{x}_n \}$ gemäß (5.6) geschlossen erfolgen.

Somit kann unter Verwendung hybrider Transitionsdichten die Gütefunktionsberechnung mittels dynamischer Programmierung (5.1) geschlossen und daher besonders effizient durchgeführt werden. Im Gegensatz zum Vorgehen basierend auf Gaußmischtransitionsdichten (Abschnitt 5.2) können sowohl zeitvariante als auch höherdimensionale Systeme direkt behandelt werden. Ferner ist durch die implizite Gütefunktionsapproximation, welche keine gesonderte aufwändige Berechnung erfordert (im Gegensatz zur Gewichtsbestimmung in Abschnitt 5.2.2 D.), eine sehr effiziente Berechnung gewährleistet.

5.3.3 Interpolation der Gütefunktion

Insbesondere bei höherdimensionalen Systemmodellen ist zur hochqualitativen rekursiven Berechnung der Gütefunktion mittels (5.6) und (5.7) eine hybride Dichte mit einer recht hohen

Komponentenzahl L notwendig. Die Anzahl der benötigten Komponenten kann durch eine Interpolation der Dirac-Komponenten der Gütefunktion deutlich reduziert werden. Hierzu sind verschiedene Ansätze möglich. Der am weitesten verbreitete Ansatz zur Gütefunktionsinterpolation besteht in der Interpolation mittels stückweise polynomieller Funktionen niedrigen Grades, d. h. Splines. Die einfachste Interpolation ist die lineare, welche ein recht niedrige Genauigkeit aufweist ([PK01]). Eine verbesserte Approximationsqualität kann mittels quadratischer ([Sch83]) oder kubischer ([JSS⁺93],[2]) Splines erreicht werden. Auch wenn die Berechnung bei dem hier betrachteten Gauß'schen bzw. Gaußmisch-Rauschen geschlossen erfolgen kann (die Berechnung kann analog zu stückweise polynomiellen Gütefunktionen durchgeführt werden, siehe hierzu Abschnitt 4.2.2 bzw. Anhang C), basieren diese Ansätze auf der willkürlichen Annahmen, dass die Gütefunktion sich gemäß eines Polynoms entsprechenden Grades verhält.

Insbesondere im Falle eines regulären Gitters, wie es bei der hier verwendeten Approximation der Gütefunktion mit einer hybriden Dichte entsteht, kann eine ideale Tiefpassinterpolation² mittels sinc-Funktionen (Sinus cardinalis)

$$\operatorname{sinc}(x/\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{\sin(\pi x/\alpha)}{\pi x/\alpha} & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.8)$$

bzw. der M -dimensionalen Erweiterung

$$\operatorname{sinc}(\underline{x}; \underline{\alpha}) = \prod_{m=1}^M \operatorname{sinc}(x^{(m)}/\alpha^{(m)})$$

durchgeführt werden, wobei das folgende Vorgehen dem in [4] entspricht.

Zur idealen Tiefpassinterpolation sind die sinc-Funktionen derart zu wählen, dass deren Nullstellen an den Positionen der anderen Dirac-Komponenten sind, was in Abb. 5.2 für den eindimensionalen Fall dargestellt ist. Bei diesem Verfahren handelt es sich um die in der Nachrichtentechnik verbreitete Whittaker-Shannon Interpolation ([Zay93]), welche zu einer Interpolation mit minimaler Oszillation führt, wobei

$$\frac{1}{2 \cdot \alpha}$$

die obere Schranke für die Frequenz der interpolierten Funktion darstellt. Diese Schranke ergibt sich direkt aus der Fouriertransformation der sinc-Funktion. Ferner ist die ideale Tiefpassinterpolation optimal, falls hinreichend kleine Diskretisierungsintervalle gewählt werden, sodass kein Aliasing auftritt. Diese Annahme liegt jeglicher Diskretisierung zu Grunde.

² engl.: cardinal hold

Wird der Diracanteil $J'_{n+1}(\underline{x}_{n+1})$ der Gütefunktion $J_{n+1}(\underline{x}_{n+1})$ in (5.6) mit sinc-Funktionen interpoliert

$$J'_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) \approx \sum_{j=1}^L \kappa_j^{(n+1)} \cdot \text{sinc} \left(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_j^{(n+1)}; \underline{\alpha} \right),$$

wobei $\kappa_{n+1}^{(j)}$ den Gewichtungsfaktor der Dirac-Komponente j darstellt, dann gilt

$$\begin{aligned} z'_{i, \underline{u}_n} &= \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}; \mathbf{C}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}) \cdot J'_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) \, d\underline{x}_{n+1} \\ &\approx \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}; \mathbf{C}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}) \cdot \sum_{j=1}^L \kappa_j^{(n+1)} \cdot \text{sinc} \left(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_j^{(n+1)}; \underline{\alpha} \right) \, d\underline{x}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Dies entspricht der Erwartungswertbildung einer Gauß'schen Zufallsvariable, welche mit einer sinc-Funktion transformiert ist. In [4] bzw. in Anhang D wird eine geschlossene Lösung für diese Berechnung im eindimensionalen Fall angegeben.

Bei Diskretisierung mit einem regulären Gitter und Systemrauschen, welches in seinen Dimensionen unkorreliert ist und somit als Produkt

$$f^w(\underline{w}) = \mathcal{N}(\underline{w} - \underline{\mu}; \mathbf{C}) = \prod_{m=1}^M \mathcal{N}(w^{(m)} - \mu^{(m)}; c^{(m)})$$

dargestellt werden kann, kann die Berechnung von (5.9) dimensionsweise erfolgen

$$\begin{aligned} z'_{i, \underline{u}_n} &\approx \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}; \mathbf{C}_{i, \underline{u}_n}^{(n+1)}) \cdot \sum_{j=1}^L \kappa_j^{(n+1)} \cdot \text{sinc} \left(\underline{x}_{n+1} - \underline{\mu}_j^{(n+1)}; \underline{\alpha} \right) \, d\underline{x}_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^L \kappa_j^{(n+1)} \int_{\mathcal{X}} \prod_{m=1}^M \underbrace{\mathcal{N} \left(x_{n+1}^{(m)} - \mu_{i, \underline{u}_n}^{(m, n+1)}; c_{i, \underline{u}_n}^{(m, n+1)} \right)}_{f_{x_{n+1}}^{(i, \underline{u}_n, m)}(x_{n+1}^{(m)})} \cdot \prod_{m=1}^M \underbrace{\text{sinc} \left(\frac{x_{n+1}^{(m)} - \mu_j^{(m, n+1)}}{\alpha^m} \right)}_{J'_{x_{n+1}}^{(j, m)}(x_{n+1}^{(m)})} \, d\underline{x}_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^L \kappa_j^{(n+1)} \prod_{m=1}^M \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \left\{ J'_{x_{n+1}}^{(j, m)} \left(\mathbf{x}_{n+1}^{(i, \underline{u}_n, m)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

5.4 Aufwandsabschätzung

Bei Verwendung der dynamischen Programmierung ist der Berechnungsaufwand zur Bestimmung des optimalen Stellwerts u^* durch die rekursive Berechenbarkeit der Gütefunktion lediglich linear von der Länge N des Horizonts abhängig. Beschränkendes Element ist hier insbesondere die Anzahl der Komponenten zur Repräsentation der Gütefunktion J , da zum einen recht viele verwendet werden müssen, um eine gute Approximation auf dem relevanten Bereich des

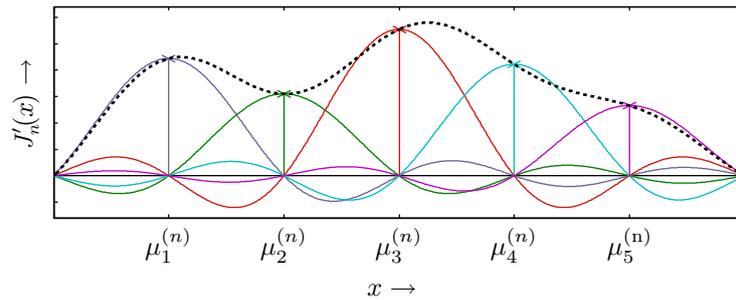


Abbildung 5.2: Ideale Tiefpassinterpolation bei fünf Dirac-Komponenten. Die gestrichelte schwarze Linie stellt die Rekonstruktion dar, die durchgezogenen farbigen Linien die sinc-Funktionen, deren Maxima an den Positionen der Dirac-Komponenten sind.

Zustandsraums zu gewährleisten, andererseits der Berechnungsaufwand quadratisch von ihrer Anzahl abhängt.

Besonders effizient ist die Berechnung mittels dynamischer Programmierung, wenn zeitinvariante System mit zeitinvarianten Schrittweiten betrachtet werden. In diesem Fall kann die Berechnung (5.2) der Gütefunktion bereits vorab erfolgen, da der aktuelle Zustand erst im letzten Schritt bei der Berechnung des Stellwerts (5.3) berücksichtigt wird.

Zusammenfassung der Verfahren zur CLF-P-SNMPC

In diesem Kapitel wurden Verfahren zur effizienten Stellwertberechnung für die CLF-P-SNMPC vorgestellt. Da, gemäß Modellierung, eine direkte Zustandsrückführung vorliegt, sind in jedem Zeitschritt exakte Zustandsinformationen verfügbar, welche bei der Regelung berücksichtigt werden. Somit kann hier im Gegensatz zur OLF-SNMPC nicht einfach eine Prädiktion für alle alternativen Stellwertsequenzen erfolgen, aus welchen dann anhand eines Gütemaßes die beste ausgewählt wird, sondern die Optimierung muss über eine Sequenz von Regelgesetzen erfolgen, welche jeweils einem Zustand einen Stellwert zuordnen. Diese Berechnung kann sehr effizient mittels dynamischer Programmierung durchgeführt werden, wobei auf Grund der hier betrachteten kontinuierlichwertigen Zustände sowie des nichtlinearen Systems eine Approximation der Gütefunktion über den betrachteten Zustandsraum erfolgen muss.

Hierzu wurden zwei alternative Verfahren vorgestellt, welche, wie bei der OLF-SNMPC, auf der Approximation der Systemtransitionsdichte mittels Gaußmischdichten sowie mittels hybrider Dichten basieren. Beim ersten Verfahren werden die kumulativen Gütefunktionen als Gaußmischfunktionen dargestellt, für die über dem Zustandsraum eine Maximumfunktion gefunden werden muss. Hierzu wurde ein effizienter Algorithmus zur Maximierung und gleichzeitigen Reapproximation vorgestellt. Beim zweiten Verfahren, welches auf hybriden Transitionsdichten basiert, werden die Gütefunktionen als Diracmischdistributionen dargestellt, welche bei einer passenden Wahl der Positionen der Komponenten direkt maximiert werden können. Außerdem wurde ein Verfahren zur Interpolation der kumulativen Gütefunktion mittels sinc-Funktionen

vorge stellt, welches eine erhebliche Verbesserung der Approximationsqualität bzw. eine Reduktion des Berechnungsaufwandes gestattet. Durch Verwendung der bereits bei der OLF-SNMPC vorgestellten Verfahren zur Schrittgütemodellierung kann bei beiden Verfahren eine effiziente Berechnung der kumulativen Gütefunktionen und somit der CLF-P-Stellwerte in geschlossener Form erfolgen.

Da bei der CLF-P-SNMPC die Stellwertberechnung auf Basis einer kumulativen Gütefunktion erfolgt, welche für den gesamten betrachteten Zustandsraum berechnet wird, ist die Berechnung bei zeitinvarianten Systemen und zeitinvarianten Schrittgütefunktionen besonders effizient, da in diesem Fall die kumulative Gütefunktion vollständig vorberechnet werden kann.

Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur Closed-Loop-Feedback-SNMPC mit nicht direkt zugänglichen Zuständen (CLF-I, Abschnitt 2.5.3) vorgestellt. Hierbei wird im Gegensatz zum Vorgehen bei der OLF-SNMPC (Kapitel 4) davon ausgegangen, dass innerhalb des betrachteten Optimierungshorizonts Informationen über den Systemzustand $\underline{x}_{k,1:N}$ durch Messungen $\hat{z}_{k,1:N}$ erlangt werden können. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 5 betrachteten Fall bei direkt zugänglichen Zuständen (CLF-P) sind diese Informationen aber nicht sicher, sondern unsicherheitsbehaftet, so dass der Systemzustand lediglich geschätzt werden kann. Diese Zustandsschätzung kann rekursiv mittels eines Bayes'schen Schätzers erfolgen.

Das im Folgenden vorgestellte CLF-I-SNMPC Verfahren basiert darauf, dass das Vorgehen zur Zustandsschätzung bei der Stellgrößenermittlung nachempfunden wird. Daher wird zunächst im folgenden Abschnitt kurz die Bayes'sche Zustandsschätzung eingeführt und es werden die verwendeten Filterverfahren vorgestellt. In Abschnitt 6.2 folgt dann die Beschreibung des eigentlichen Verfahrens, wobei hier nach einer Beschreibung des grundlegenden Vorgehens das Konzept virtueller Messungen eingeführt und dann ein Verfahren zur rekursiven Berechnung angegeben wird. In Abschnitt 6.3 werden dann Modifikationen des Verfahrens aus Abschnitt 6.2 zur Erhöhung der Effizienz der Berechnung angegeben.

6.1 Bayes'sche Zustandsschätzung

Bei der Bayes'schen Zustandsschätzung wird in einem zweischrittigen Verfahren eine Dichteschätzung $f_k^e(\underline{x}_k)$ bestimmt, welche den Zustand \underline{x}_k beschreibt. Die Struktur eines solchen Schätzers ist in Abb. 6.1 dargestellt.

1. Im ersten Schritt, dem *Prädiktionsschritt*, wird ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{k-1}^e(\underline{x}_{k-1})$, welche den Zustand zum Zeitpunkt $k - 1$ beschreibt, diese mittels *Vorwärtsinferenz* (4.2), wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, auf die Dichte f_k^p abgebildet.

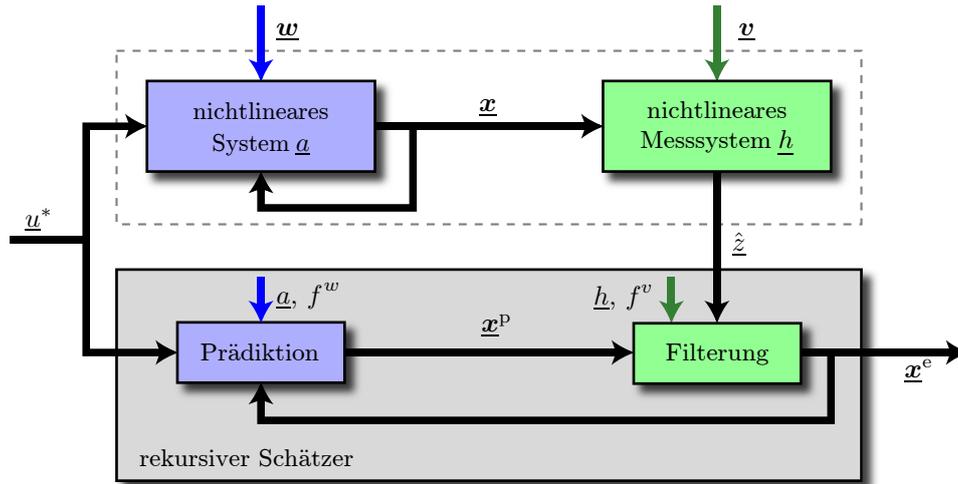


Abbildung 6.1: Rekursiver Bayes'scher Schätzer.

2. Im zweiten Schritt, dem *Filterschritt*, wird dann unter Ausnutzung des Satz von Bayes für kontinuierliche Zufallsvariablen

$$f(x|z) = \frac{1}{f(z)} \cdot f(z|x) \cdot f(x)$$

ausgehend von der prädizierten Zustandsdichte f_k^p und einem Messwert $\hat{z}_k \in \mathcal{Z}$ durch *Rückwärtsinferenz* die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_k^e(\underline{x}_k)$ berechnet

$$f_k^e(\underline{x}_k) = c_k \cdot f_k^L(\underline{x}_k) \cdot f_k^p(\underline{x}_k) . \quad (6.1)$$

Bei c_k handelt es sich um eine Normierungskonstante, für die gilt

$$c_k = \frac{1}{\int_{\mathcal{X}} f_k^L(\underline{x}_k) \cdot f_k^p(\underline{x}_k) d\underline{x}_k} .$$

Die Dichte $f_k^L(\underline{x}_k)$ wird als *Likelihood* bezeichnet und beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systemzustands \underline{x}_k bei einer konkreten Messung \hat{z}_k ohne weiteres Vorwissen. Bei dem im Folgenden betrachteten Fall additiven Messrauschens

$$\underline{z}_k = \underline{h}_k(\underline{x}_k) + \underline{v}_k \quad (6.2)$$

kann die bedingte Dichte $f_k^M(\underline{z}_k|\underline{x}_k)$ eingeführt werden, welche, analog zur Tansitionsdichte $f_k^T(\underline{x}_{k+1}|\underline{x}_k)$, eine probabilistische Beschreibung des Messmodells (2.3) darstellt

$$f_k^M(\underline{z}_k|\underline{x}_k) = f_k^v(\underline{z}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k)) .$$

Die Likelihood $f_k^L(\underline{x}_k)$ kann als die am Messwert \hat{z}_k ausgewertete Messtransitionsdichte $f_k^M(\underline{z}_k|\underline{x}_k)$ interpretiert werden

$$f_k^L(\underline{x}_k) = f_k^M(\hat{z}_k|\underline{x}_k) ,$$

wodurch sich direkt die alternative Darstellung des Bayes'schen Filterschritts (6.1)

$$f_k^e(\underline{x}_k) = \frac{1}{\underbrace{\int_{\mathcal{X}} f_k^M(\hat{z}_k|\underline{x}_k) \cdot f_k^P(\underline{x}_k) d\underline{x}_k}_{c_k(\hat{z}_k)}} \cdot f_k^M(\hat{z}_k|\underline{x}_k) \cdot f_k^P(\underline{x}_k) \quad (6.3)$$

ergibt.

Zusammen ergeben Prädiktions- und Filterschritt ein rekursives Verfahren, um die zeitliche Entwicklung eines Systems stochastisch zu beschreiben. Der Prädiktionsschritt muss in jedem Zeitschritt des Systems durchgeführt werden, um den Schätzer mit dem System synchron zu halten. Der Filterschritt hingegen wird immer dann durchgeführt, wenn neue Informationen durch Messungen vorliegen, was nicht in jedem Zeitschritt k der Fall sein muss. Im Folgenden wird (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) davon ausgegangen, dass zu jedem Zeitschritt eine neue Messung vorliegt.

6.1.1 Verwendete Filterverfahren

Für lineare Systeme mit additivem unkorreliertem Gauß'schen Rauschen können Prädiktions- und Filterschritt geschlossen berechnet werden, was zum Kalman-Filter führt, welches für diese Systeme den optimalen Schätzer darstellt [Kal60]. Für die hier betrachteten nichtlinearen Systeme kann die Berechnung typischerweise weder geschlossen erfolgen, noch können die Wahrscheinlichkeitsdichten $f_k^P(\underline{x}_k)$ und $f_k^e(\underline{x}_k)$ exakt beschrieben werden. Daher kann nur eine approximative Berechnung durchgeführt werden und auch die Wahrscheinlichkeitsdichten $f_k^P(\underline{x}_k)$ und $f_k^e(\underline{x}_k)$ können nur genähert dargestellt werden.

Bei vielen der sehr weit verbreiteten recht einfachen approximativen Verfahren werden nur die ersten beiden Momente der Zufallsvariable des Zustands berücksichtigt und weitere Informationen insbesondere bezüglich der Form der unterlagerten Wahrscheinlichkeitsdichte vernachlässigt. Zu diesen Verfahren zählen das Extended Kalman-Filter (EKF) [Sim06], das Unscented Kalman-Filter (UKF) [JU04] sowie Gaußfilter [HH08].

Da diese Verfahren insbesondere bei nichtlinearen Messsystemen zu erheblichen Approximationsfehlern führen können und auch nicht in der Lage sind, Multimodalitäten zu berücksichtigen, wie sie z. B. bei Abstandsmessungen auftreten, werden im Folgenden Verfahren eingesetzt, bei denen der Prädiktionsschritt wie in Abschnitt 4.1 beschrieben mittels einer Approximation der Transitionsdichte durchgeführt wird. Dieses kann zum einen mittels Approximation durch Gaußmischdichten (Abschnitt 4.1.1) oder aber auch durch hybride Dichten (Abschnitt 4.1.2) geschehen. Diese beiden Verfahren können auch derart erweitert werden, dass die Messtransitionsdichte $f_k^M(z_k|\underline{x}_k)$ ebenso durch eine Gaußmischdichte oder durch eine hybride Dichte approximiert wird. Die Filterung auf Basis von Gaußmischdichten wird in [HBH07] und die Filterung auf Basis von hybriden Dichten in [HH07b] beschrieben. In beiden Fällen kann die Berechnung geschlossen erfolgen, da lediglich Auswertungen und Multiplikationen von Gaußfunktionen zur Berechnung notwendig sind.

Die resultierende geschätzte Dichte $f_k^e(\underline{x}_k)$ ist bei dem Verfahren auf Basis von Gaußmischdichten ebenso eine Gaußmischdichte. Bei dem Verfahren auf Basis von hybriden Dichten handelt es sich bei der geschätzten Dichte $f_k^e(\underline{x}_k)$ um eine Diracmischdichte. In [BH06] wird ein Verfahren angegeben, welches auch in [HH07b] Verwendung findet, mittels dessen die resultierende Diracmischdichte sehr effizient durch eine Gaußmischdichte interpoliert werden kann.

Wie auch bei der reinen Prädiktion führt die Filterung auf Basis einer Gaußmischmesstransitionsdichte zu höherqualitativen Ergebnissen als die Berechnung auf Basis einer hybriden Dichte. Andererseits kann die Approximation der Messtransitionsdichte durch eine Gaußmischfunktion lediglich off-line erfolgen, da es sich hierbei um ein aufwändiges hochdimensionales Optimierungsproblem handelt. Die Approximation durch eine hybride Dichte hingegen ist deutlich weniger aufwändig, weswegen dieses Verfahren auch für zeitvariante und höherdimensionale Messsystem eingesetzt werden kann.

6.2 Stellwertberechnung unter Berücksichtigung verrauschter Messungen

Zur Berechnung des CLF-I-Stellwerts, d. h. der Lösung von (2.8), wird zur Stellgrößenermittlung nicht nur das Verhalten des Systems, sondern auch das Verhalten des Messsystems sowie des stochastischen Schätzers mitberücksichtigt. Ferner wird die Berechnung ausgehend von der vollständigen Dichteinformation $f_{k,0}$ des Systemzustands, welche der Schätzer liefert, durchgeführt. Daher wird innerhalb des betrachteten Optimierungshorizonts nicht nur, wie es bei der stochastischen OLF-Regelung geschieht (Kapitel 4), das stochastische Systemverhalten mittels Prädiktionsschritten nachempfunden, sondern es wird auch das Verhalten des Messsystems und die Zustandsfilterung im Schätzer mitberücksichtigt. Dieses Vorgehen entspricht dem in [10], [Sch08] vorgestellten. Da alle Berechnungen für einen festen Zeitpunkt k durchgeführt werden und nur der Index innerhalb des Optimierungshorizonts n variiert, wird im Folgenden (wie auch in den vorherigen Kapiteln), der feste Zeitindex k nicht angegeben.

Ausgehend von einer initialen Zustandsschätzung f_0 können für verschiedene konkrete Stellwert- und Messwertsequenzen $\underline{u}_{0:n-1} \in \mathcal{U}$ bzw. $\hat{\underline{z}}_{1:n} \in \hat{\mathcal{Z}}$ die Wahrscheinlichkeitsdichten $f_n^{\text{el}|\underline{u}_{0:n-1};\hat{\underline{z}}_{1:n}}$ eines Zustands \underline{x}_n zum Zeitpunkt n berechnet werden. Enthalten $\hat{\mathcal{Z}}$ und \mathcal{U} endlich viele diskrete Elemente, dann führt dies zu einer Baumstruktur wie in Abb. 6.2 dargestellt. Analog zum OLF-Suchbaum (Abb. 4.8) entspricht ein Knoten des Baums einem durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschriebenen prädizierten bzw. gefilterten Systemzustand. Eine Kante des Baums repräsentiert entweder einen Stell- oder einen Messwert, wobei die Kanten, welche von einem Knoten ausgehen, jeweils alternative Stell- bzw. Messwerte darstellen. Abhängig davon, ob ein Knoten direkt aus einem stellwertabhängigen Prädiktionsschritt oder aber einem messwertabhängigen Filterschritt hervorgeht, wird der ihm entsprechende Systemzustand mit zugehöriger Dichte mit $\underline{x}_n^{\text{p}|\underline{u}_{0:n-1};\hat{\underline{z}}_{1:n-1}} \sim f_n^{\text{p}|\underline{u}_{0:n-1};\hat{\underline{z}}_{1:n-1}}$ bzw. $\underline{x}_n^{\text{el}|\underline{u}_{0:n-1};\hat{\underline{z}}_{1:n}} \sim f_n^{\text{el}|\underline{u}_{0:n-1};\hat{\underline{z}}_{1:n}}$ bezeichnet. Dieser Systemzustand ist von den zu ihm führenden Kanten, d. h. Stell- und Messwerten, abhängig, wobei eine Stell- und Messwertsequenz den Systemzustand eindeutig spezifiziert.

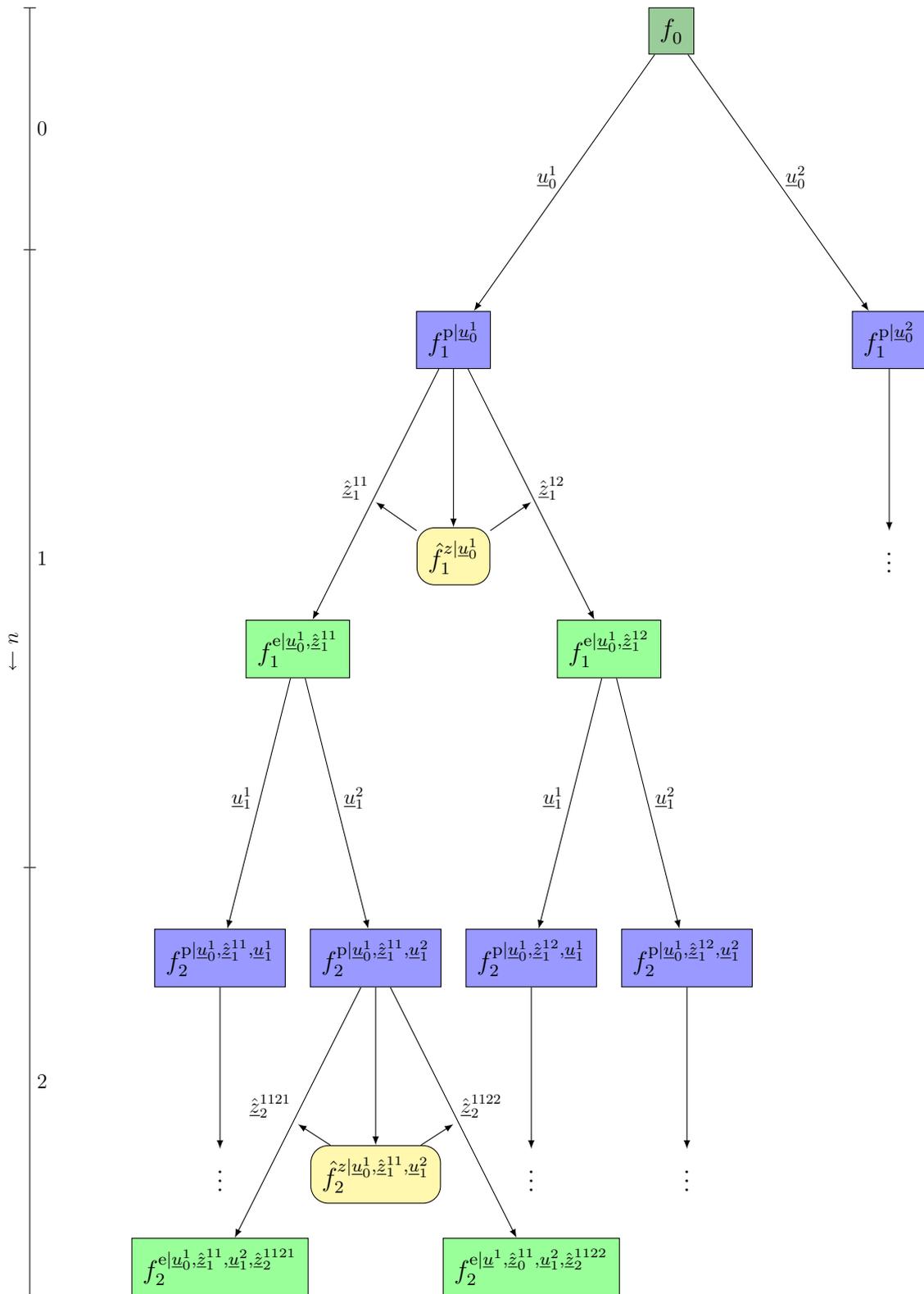


Abbildung 6.2: Ausschnitt des Suchbaums eines Closed-Loop-Feedback-SNMPC-Reglers unter Berücksichtigung unsicherer Messungen (CLF-I) mit $N = 2$ Zeitschritten, $|\mathcal{U}| = 2$ alternativen Stellgrößen und jeweils $L^z = 2$ virtuellen Messungen. Kanten einer Ebene entsprechen entweder alternativen Stellwerten oder aber alternativen Messwerten, Knoten den sich ergebenden Zuständen, welche mittels einer Wahrscheinlichkeitsdichte beschrieben werden.

6.2.1 Das Prinzip der virtuellen Messungen

Da bei den hier betrachteten Systemen keine Messungen aus einem diskreten sondern aus einem kontinuierliche Messraum \mathcal{Z} vorliegen, kann ein Baum wie in Abb. 6.2 nicht direkt erstellt werden, da anstatt einer endlichen Zahl diskreter \hat{z}_n unendlich viele verschiedene Messwerte Berücksichtigung finden müssten. Um eine approximative Lösung zu erhalten kann aber eine endliche Menge möglichst repräsentativer Messwerte verwendet werden, die im Folgenden als *virtuelle Messungen* bezeichnet werden. Der Ausdruck virtuelle Messungen kommt daher zustande, dass zum Zeitpunkt $n = 0$ die realen Messwerte für spätere Zeitpunkte noch nicht vorliegen. Dennoch können aber sehr wohl unter Berücksichtigung des Messmodells (6.2) Aussagen über die Wahrscheinlichkeitsdichten von Messungen zu Zeitpunkten $n > 0$ getroffen werden.

Dazu kann analog zur Zustandsprädiktion (4.2) (Abschnitt 4.1) durch Vorwärtsinferenz mit dem Messmodell (6.2) von der Wahrscheinlichkeitsdichte eines Zustands $f^p(\underline{x})$ auf die Wahrscheinlichkeitsdichte möglicher Messungen $f^z(\underline{z})$ geschlossen werden

$$f_n^z(\underline{z}_n) = \int_{\mathcal{X}} f_n^M(\underline{z}_n|\underline{x}_n) \cdot f_n^p(\underline{x}_n) \, d\underline{x}_n . \quad (6.4)$$

Man erhält somit eine Wahrscheinlichkeitsdichte des kontinuierlichwertigen Messvektors \underline{z}_n zum Zeitpunkt n .

Wird wie in Abschnitt 4.1 bzw. in Abschnitt 6.1.1 beschrieben, die Messtransitionsdichte $f_n^M(\underline{z}_n|\underline{x}_n)$ durch eine Gaußmischdichte oder hybride Dichte approximiert, dann handelt es sich bei der Darstellung von $f_n^z(\underline{z}_n)$ um eine Gaußmischdichte.

Dichteapproximation der virtuellen Messung

Um aus der kontinuierlichen Dichte f_n^z , welche als Gaußmischdichte gegeben ist, L^z möglichst repräsentative virtuelle Messwerte zu generieren, kann hierzu eine systematische, auf Formerhaltung der Dichte- bzw. Verteilungsfunktion ausgerichtete Diracmischdichteapproximation durchgeführt werden. Die so erhaltenen diskreten virtuellen Messungen können dann zum Aufbau des Suchbaums verwendet werden (Abb. 6.3.)

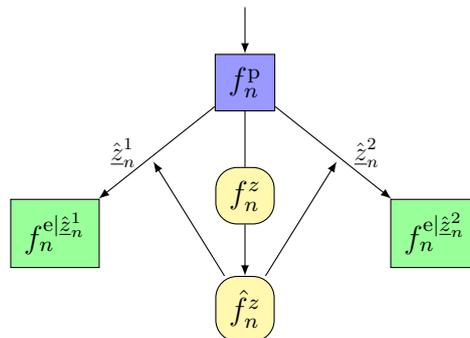


Abbildung 6.3: Ausschnitt des Suchbaums aus Abb. 6.2. Durch Approximation der kontinuierlichen Dichte f_n^z mittels der Diracmischdichte \hat{f}_n^z ergeben sich diskrete virtuelle Messungen \hat{z}_n^1 und \hat{z}_n^2 .

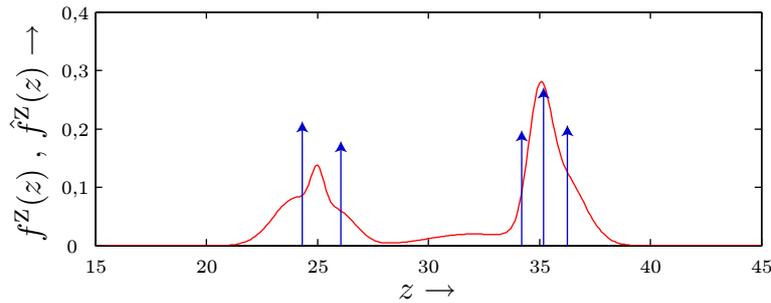


Abbildung 6.4: Diracmischapproximation $\hat{f}^z(z)$ einer virtuellen Messungsdichte $f^z(z)$, welche als Gaußmischdichte dargestellt ist.

Dazu wird im Folgenden für eindimensionale Messungen das Verfahren aus [SBH06b] eingesetzt. In diesem Verfahren wird progressiv die Cramér–von Mises-Distanz [Boo81] minimiert

$$\min_{\omega^{1:L^z}, \mu^{1:L^z}} G(\omega^{1:L^z}, \mu^{1:L^z}) = \int_{-\infty}^{\infty} r(z) (F(z) - \bar{F}(z; \omega^{1:L^z}, \mu^{1:L^z}))^2 dz ,$$

wobei $r(z)$ eine nichtnegative Gewichtung- oder Fensterfunktion ist. Bei $F(z)$ handelt es sich um die wahre Verteilungsfunktion

$$F(z) = \int_{-\infty}^z f^z(t) dt ,$$

bei $\bar{F}(z, \omega^{1:L^z}, \mu^{1:L^z})$ um die approximierende. Die Approximation erfolgt mit einer Diracmischdichte

$$\sum_{l=1}^{L^z} \omega^l \cdot \delta(z - \mu^l) = f^z(z) \approx \hat{f}^z(z) ,$$

bei der sowohl die Gewichte ω^l als auch die Positionen μ^l der L^z Komponenten optimiert werden. Das Gewicht ω^l gibt hierbei die approximierte Wahrscheinlichkeit des Auftretens des virtuellen Messwerts μ^l an. In Abb. 6.4 ist das Ergebnis einer derartigen Approximation dargestellt.

Alternativ zu dem global-optimierenden Ansatz kann auch ein sukzessiv-approximierendes Greedy-Verfahren, wie in [HS07] beschrieben, verwendet werden. Durch den Greedy-Ansatz ist die Qualität der approximativen Lösung typischerweise niedriger, wobei aber auch der benötigte Berechnungsaufwand deutlich geringer ist. Liegen vektorwertige Messungen vor, kann die Dirac-Approximation entweder dimensionsweise entkoppelt vorgenommen werden oder aber es kann z. B. das Verfahren aus [KH08] Anwendung finden.

6.2.2 Rekursive Berechnung

Die Berechnung der optimalen Stellgröße \underline{u}^* kann auch bei der CLF-I-Regelung auf Basis der kumulierten Gütefunktion erfolgen

$$\underline{u}_0^*(\underline{x}_0) = \arg \max_{\underline{u}_0} \left\{ J_1^P(\underline{x}_1^{p|\underline{u}_0}) \right\} = \arg \max_{\underline{u}_0} \left\{ J_1^P(\underline{a}_0(\underline{x}_0, \underline{u}_0) + \underline{w}_0) \right\} .$$

Die Güte $J_1^P(\underline{x}_1^{p|\underline{u}_0})$ kann ähnlich zum Vorgehen bei der OLF-SNMPC (Abschnitt 4.3) zeitlich rückwärtsgerichtet rekursiv berechnet werden. Die Rekursion wird an den Blättern des Baums, d. h. im Endzeitschritt des Horizonts N mit der terminalen Schrittgüte initialisiert

$$J_N^e(\underline{x}_N) = g_N(\underline{x}_N). \quad (6.5)$$

Bei der weiteren rekursiven Berechnung ist zu berücksichtigen, dass sowohl Zufallsvariablen \underline{x}^P , welche aus einer stellwertabhängigen Prädiktion hervorgehen, als auch Zufallsvariablen \underline{x}^e , welche durch eine Filterung entstehen, vorliegen. Daher müssen, wie im Folgenden dargestellt, zwei unterschiedliche kumulative Güten verwendet werden. Als Güte $J^e(\underline{x}^e)$ werden diejenigen Güten bezeichnet, deren zugehöriger Zustand aus einer Filterung mit virtuellen Messungen hervorgegangen ist. Mit $J^P(\underline{x}^P)$ werden diejenigen Güten bezeichnet, deren zugehöriger Zustand durch Prädiktion entstanden ist.

Berechnung der Güte J_n^e auf Basis der Güte J_{n+1}^P

Bei der hier betrachteten alternierenden Sequenz von Prädiktions- und Filterschritten folgt wie in Abb. 6.2 dargestellt auf jeden gefilterten Zustand \underline{x}_n^e ein prädizierter Zustand \underline{x}_{n+1}^P . Daher kann die Güte $J_n^e(\underline{x}_n^e)$, welche die eigentlichen Güten zum Zeitpunkt n darstellen, analog zu der Berechnung bei der OLF-SNMPC (Abschnitt 4.3) durch Maximierung bezüglich der Stellgröße \underline{u}_n erfolgen

$$J_n^e(\underline{x}_n^e) = \max_{\underline{u}_n} \left\{ g_n(\underline{x}_n^e, \underline{u}_n) + J_{n+1}^P(\underline{x}_{n+1}^{p|\underline{u}_n}) \right\} \quad \text{für } n < N, \quad (6.6)$$

was dem Vorgehen wie in Abb. 6.5 dargestellt entspricht.

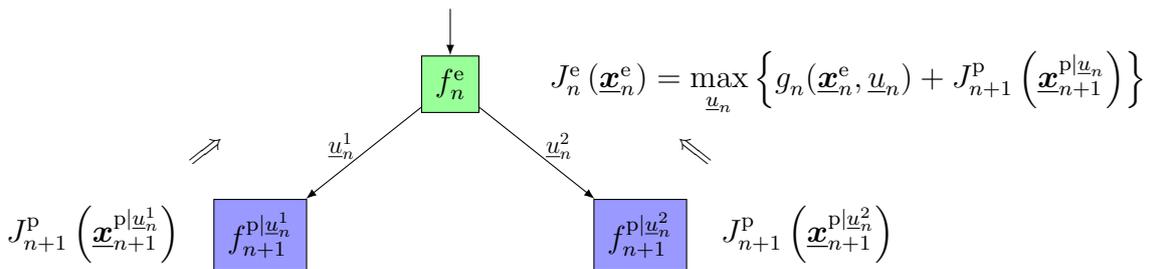


Abbildung 6.5: Berechnung der Güte $J_n^e(\underline{x}_n^e)$ auf Basis der Güte $J_{n+1}^P(\underline{x}_{n+1}^P)$.

Berechnung der Güte J_n^p auf Basis der Güte J_n^e

Die Güten $J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p)$ werden bei der hier betrachteten alternierenden Sequenz von Prädiktions- und Filterschritten auf Basis der Güten $J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\hat{z}_n})$ berechnet und stellen einen Zwischenschritt zur Berechnung der Güten $J_{n-1}^e(\underline{\mathbf{x}}_{n-1}^e)$ dar. Die Zustandsdichten $f_n^{e|\hat{z}_n}$, welche die Zufallsvariablen $\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\hat{z}_n}$ beschreiben, sind hierbei von den jeweiligen diskretisierten virtuellen Messwerten \hat{z}_n abhängig. Da im Gegensatz zum Vorgehen bei der stellgrößenabhängigen Prädiktion zur Berechnung von J_n^e , wo über die Stellgröße optimiert wird, das Auftreten eines virtuellen Messwertes zufällig erfolgt, ergibt sich die Güte $J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p)$ durch Erwartungswertbildung über den Güten $J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\hat{z}_n})$ bezüglich der virtuellen Messwerte \hat{z}_n

$$J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p) = E_{\hat{z}_n} \left\{ J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\hat{z}_n}) \right\}, \quad (6.7)$$

was dem Vorgehen wie in Abb. 6.6 dargestellt entspricht.

Da die Auftrittswahrscheinlichkeit einer der virtuellen Messwerte, welche den Positionen μ^l der Komponenten der Diracmischapproximation entsprechen, durch deren Gewicht ω^l approximiert wird, entspricht dieses Gewicht der Wahrscheinlichkeit, mit der die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_n^{e|\hat{z}_n^l}$ und somit die Güte $J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\hat{z}_n^l})$ sich aus dem Zustand $\underline{\mathbf{x}}_n^p \sim f_n^p$ ergibt. Da es sich bei (6.7) um die Berechnung eines Erwartungswertes einer diskreten Verteilung handelt, gilt somit für die Güte $J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p)$

$$J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p) = \sum_{l=1}^{L^z} \omega^l \cdot J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\hat{z}_n^l}).$$

Der vollständige CLF-I Suchbaum des Beispiels aus Abb. 6.2 ist mit gewichteten Kanten in Abb. 6.7 dargestellt. Die Gewichte der Kanten, welche nach Knoten mit gefilterten Dichten f^e bzw. dem Wurzelknoten folgen, entsprechen der optimal gewählten Stellgröße. Die Gewichte der Kanten, welche nach Knoten mit prädizierten Dichten f^p folgen, entsprechen den Wahrscheinlichkeiten der virtuellen Messungen \hat{z} .

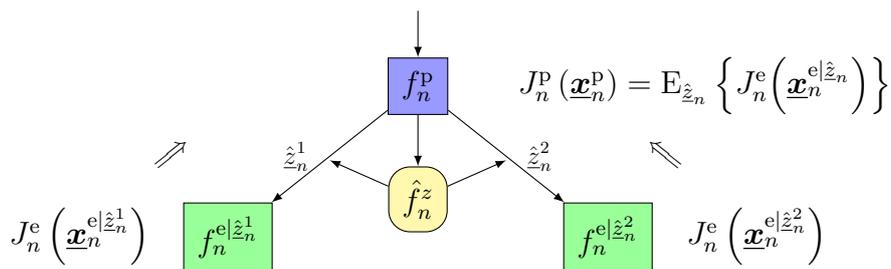


Abbildung 6.6: Berechnung der Güte $J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p)$ auf Basis der Güte $J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^e)$.

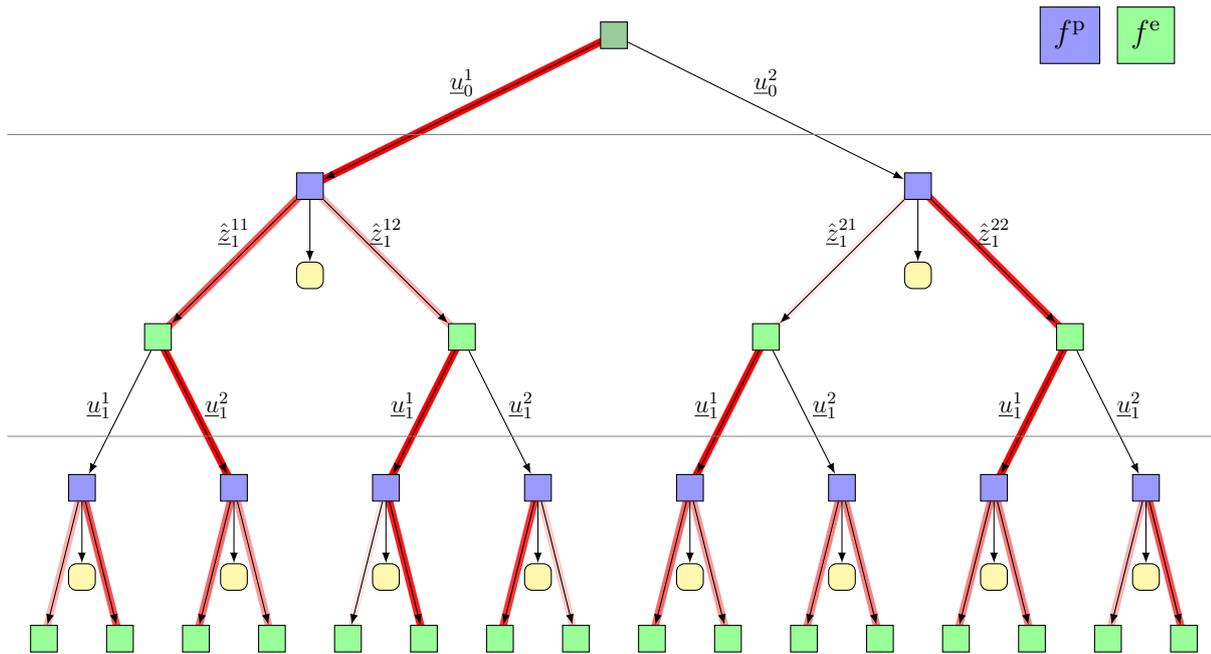


Abbildung 6.7: Exemplarische Darstellung des vollständigen Suchbaums des Beispiels aus Abb. 6.2 mit gewichteten Kanten. Die Stärke der roten Einfärbung symbolisiert das Gewicht der Kanten. Dem Wurzelknoten sowie Knoten mit gefilterten Dichten f^e (grün) folgt aufgrund der Maximierung immer genau eine Kante mit Gewicht 1. An Knoten mit prädizierten Dichten f^p (rot) entsprechen die Gewichte den Wahrscheinlichkeiten der virtuellen Messungen \hat{z} , wobei sich die Gewichte immer zu 1 summieren. Die inferierten Messungsdichten sind gelb symbolisiert.

Aufwandsabschätzung

Zur vollständigen Auswertung des Suchbaums der Tiefe N zur Berechnung der Stellgröße \underline{u}^* sind somit zusammen

$$2 \cdot \sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^{n-1})$$

Prädiktionsschritte zur Berechnung der Dichten f^p und f^M sowie

$$\sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^n)$$

Filterschritte zur Berechnung der Dichten f^e notwendig. Ferner muss die Schrittgröße g

$$1 + \sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^n)$$

mal berechnet werden.

6.3 Methoden zur effizienten Berechnung

In diesem Abschnitt werden Verfahren vorgestellt, mittels derer die Berechnung der CLF-I Stellgrößen aus Abschnitt 6.2 effizienter durchgeführt werden kann. Zunächst wird in Abschnitt 6.3.1 beschrieben, wie im Fall erwartungswertbasierter stellgrößenabhängiger Schrittgrößefunktionen die Berechnung auf Basis der prädizierten Zustände $\underline{\mathbf{x}}^p$ erfolgen kann, was bereits zu einer deutlichen Reduktion des benötigten Berechnungsaufwands führt. In Abschnitt 6.3.2 wird dann beschrieben, wie bei der CLF-I mittels einer probabilistischen Branch-and-Bound-Suche (PBAB) unter Wahrung der Optimalität eine effiziente Baumsuche durchgeführt werden kann.

6.3.1 Erwartungswertbasierte stellgrößenabhängige Schrittgrößefunktionen

Werden erwartungswertbasierte stellgrößenabhängige Schrittgrößefunktionen der Form $g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^e) = E_{\underline{\mathbf{x}}} \{ \hat{g}^x(\underline{\mathbf{x}}) \}$, wie in Abschnitt 4.2.1 - 4.2.4 vorgestellt, verwendet, dann kann die Berechnung der kumulativen Gütefunktion effizienter erfolgen, als in Abschnitt 6.2.2 vorgestellt. Bei der Berechnung in Abschnitt 6.2.2 wird die Gütefunktion jeweils nach Durchführung des Filterschritts, also auf Basis von $\underline{\mathbf{x}}_n^e \sim f_n^e$, bestimmt. Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Berechnung auch bereits auf Basis der prädizierten Zufallsvariable $\underline{\mathbf{x}}_n^p \sim f_n^p$ erfolgen kann.

Satz 6.1 *Für die Berechnung der kumulierten Güte ist es unerheblich, ob die erwartungswertbasierte stellgrößenabhängige Schrittgrößefunktion $g_n(\underline{\mathbf{x}}_n) = E_{\underline{\mathbf{x}}_n} \{ \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n) \}$ vor oder nach dem Filterschritt berechnet wird, d. h. es gilt*

$$\begin{aligned} J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p) &= E_{\underline{\mathbf{z}}_n} \left\{ \max_{\underline{\mathbf{u}}_n} \left\{ g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^e) + J_{n+1}^p(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^{p|\underline{\mathbf{u}}_n}) \right\} \right\} \\ &= g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^p) + E_{\underline{\mathbf{z}}_n} \left\{ \max_{\underline{\mathbf{u}}_n} \left\{ J_{n+1}^p(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^{p|\underline{\mathbf{u}}_n}) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Zunächst wird der Fall $n < N$ betrachtet. Durch Einsetzen der rekursiven Berechnungsvorschrift für die kumulative Gütefunktion J_n^e (6.6) in die Berechnungsvorschrift für J_n^p (6.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p) &= E_{\underline{\mathbf{z}}_n} \{ J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\underline{\mathbf{z}}_n}) \} \\ &= \int_{\mathcal{Z}} J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\underline{\mathbf{z}}_n}) \cdot f_n^z(\underline{\mathbf{z}}_n) \, d\underline{\mathbf{z}}_n \\ &= \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\underline{\mathbf{z}}_n) \cdot \left(\max_{\underline{\mathbf{u}}_n} \left\{ J_{n+1}^p(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^{p|\underline{\mathbf{z}}_n, \underline{\mathbf{u}}_n}) + g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\underline{\mathbf{z}}_n}) \right\} \right) \, d\underline{\mathbf{z}}_n \\ &= \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\underline{\mathbf{z}}_n) \cdot \max_{\underline{\mathbf{u}}_n} \left\{ J_{n+1}^p(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^{p|\underline{\mathbf{z}}_n, \underline{\mathbf{u}}_n}) \right\} \, d\underline{\mathbf{z}}_n + \underbrace{\int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\underline{\mathbf{z}}_n) \cdot g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{e|\underline{\mathbf{z}}_n}) \, d\underline{\mathbf{z}}_n}_{=: \Gamma}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Hierbei wird ausgenutzt, dass die betrachtete Schrittgröße $g_n(\underline{\mathbf{x}}_n)$ nicht stellgrößenabhängig ist und somit auch keinen Einfluss auf die Maximierung hat.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass gilt

$$\Gamma = g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{\text{P}}) .$$

Unter Ausnutzung, dass es sich um eine erwartungswertbasierte Schrittgüte $g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{\text{e}}) = \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{x}}} \{ \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}) \}$ handelt und durch einsetzen des Bayes'schen Filterschritts (6.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\hat{z}_n) \cdot g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{\text{e}|\hat{z}_n}) \, d\hat{z}_n \\ &= \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\hat{z}_n) \cdot \mathbb{E}_{\underline{\mathbf{x}}_n} \{ \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{\text{e}|\hat{z}_n}) \} \, d\hat{z}_n \\ &= \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\hat{z}_n) \cdot \int_{\mathcal{X}} \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{e}|\hat{z}_n}(\underline{\mathbf{x}}_n) \, d\underline{\mathbf{x}}_n \, d\hat{z}_n \\ &= \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\hat{z}_n) \cdot \int_{\mathcal{X}} \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}) \cdot c_n(\hat{z}_n) f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}) f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}) \, d\underline{\mathbf{x}}_n \, d\hat{z}_n . \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (6.4) folgt

$$\Gamma = \int_{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{X}} f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n) \, d\underline{\mathbf{x}}_n \cdot \int_{\mathcal{X}} \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot c_n(\hat{z}_n) f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}_n) f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n) \, d\underline{\mathbf{x}}_n \, d\hat{z}_n .$$

Nach Einsetzen der Normierungskonstante $c_n(\hat{z}_n)$ kann der Ausdruck vereinfacht werden

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{\mathcal{Z}} \int_{\mathcal{X}} \cancel{f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n)} \, d\underline{\mathbf{x}}_n \cdot \int_{\mathcal{X}} \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot \frac{f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n)}{\int_{\mathcal{X}} \cancel{f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n)} \, d\underline{\mathbf{x}}_n} \, d\underline{\mathbf{x}}_n \, d\hat{z}_n \\ &= \int_{\mathcal{X}} \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{Z}} f_n^{\text{M}}(\hat{z}_n|\underline{\mathbf{x}}_n) \, d\hat{z}_n}_{=1} \, d\underline{\mathbf{x}}_n \\ &= \int_{\mathcal{X}} \hat{g}_n(\underline{\mathbf{x}}_n) \cdot f_n^{\text{P}}(\underline{\mathbf{x}}_n) \, d\underline{\mathbf{x}}_n \\ &= g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^{\text{P}}) . \end{aligned} \tag{*}$$

Für den Fall $n = N$ gilt

$$\begin{aligned} J_N^{\text{P}}(f_N^{\text{P}}) &= \mathbb{E}_{\hat{z}} \left\{ J_N(\underline{\mathbf{x}}_N^{\text{e}|\hat{z}}) \right\} \\ &= \mathbb{E}_{\hat{z}} \left\{ g_N(\underline{\mathbf{x}}_N^{\text{e}|\hat{z}}) \right\} \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{Z}} f_N^z(\hat{z}) \cdot g_N(\underline{\mathbf{x}}_N^{\text{e}|\hat{z}}) \, d\hat{z}}_{=\Gamma} \\ &= g_N(\underline{\mathbf{x}}_N^{\text{P}}) . \end{aligned} \tag{**}$$

Durch Einsetzen von (*) und (**) in $J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p)$ (6.8) ergibt sich

$$J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p) = \begin{cases} \int_{\mathcal{Z}} f_n^z(\hat{\underline{z}}_n) \cdot \max_{\underline{u}_n \in \mathcal{U}} \left\{ J_{n+1}^p \left(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^p |_{\hat{\underline{z}}_n, \underline{u}_n} \right) \right\} d\hat{\underline{z}}_n + g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^p) & \text{für } n < N \\ g_N(\underline{\mathbf{x}}_N^p) & \text{für } n = N \end{cases} .$$

□

Somit ist gezeigt, dass bei erwartungswertbasierten zustandsabhängigen Schrittgütefunktionen die Schrittgüte auch bereits nach dem Prädiktionsschritt berechnet werden kann.

Es ist zu beachten, dass hier der Fall mit unendlich vielen virtuellen Messungen betrachtet wurde ($L^z \rightarrow \infty$). Beim Aufbau des Suchbaumes können nicht unendlich viele virtuelle Messungen betrachtet werden, so dass die Auswertung der Gütefunktion vor und nach dem Filterschritt zu unterschiedlichen Ergebnissen führt. Dennoch ist die Berechnung *vor* dem Filterschritt zu bevorzugen, da die Betrachtung unendlich vieler virtueller Messungen dem Idealfall entspricht.

Im Falle erwartungswertbasierter zustandsabhängiger Schrittgütefunktionen ergibt sich die rekursive Berechnungsvorschrift

$$J_n^p(\underline{\mathbf{x}}_n^p) = \begin{cases} g_n(\underline{\mathbf{x}}_n^p) + E_{\hat{\underline{z}}} \left\{ J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^e |_{\hat{\underline{z}}}) \right\} & \text{für } n < N \\ g_N(\underline{\mathbf{x}}_N^p) & \text{für } n = N \end{cases} ,$$

$$J_n^e(\underline{\mathbf{x}}_n^e) = \max_{\underline{u}_n} \left\{ J_{n+1}^p \left(\underline{\mathbf{x}}_{n+1}^p |_{\underline{u}_n} \right) \right\} .$$

Somit muss beim hier betrachteten Spezialfall im letzten Zeitschritt N des Prädiktionshorizonts kein Filterschritt mehr durchgeführt werden, wodurch die komplette untere Ebene des Suchbaums entfällt.

Aufwandsabschätzung

Durch die Auswertung der Schrittgüten auf Basis der prädizierten Zustände und den Wegfall der unteren Ebene des Suchbaums verringert sich der Berechnungsaufwand im Vergleich zum direkten Vorgehen (Abschnitt 6.2.2) zur Auswertung des Suchbaums der Tiefe N erheblich. Nunmehr sind

$$\sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^{n-1}) + \sum_{n=1}^{N-1} (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^{n-1})$$

Prädiktionsschritte zur Berechnung der Dichten f^p und f^M sowie

$$\sum_{n=1}^{N-1} (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^n)$$

Filterschritte zur Berechnung der Dichten f^e notwendig. Ferner muss die Schrittgröße g lediglich

$$\sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}|^n \cdot (L^z)^{n-1})$$

mal berechnet werden.

6.3.2 Probabilistisches Branch-and-Bound

Ähnlich der Uniform Cost Search bei der OLF-SNMPC (Abschnitt 4.3.2) kann auch bei der CLF-I durch eine effiziente Baumsuche der benötigte Berechnungsaufwand unter Wahrung der Optimalität deutlich reduziert werden. Dazu wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Erweiterung des Branch-and-Bound (BAB) Algorithmus [RN03] entwickelt. Die Grundidee von BAB besteht darin, jedem besuchten Knoten des Baumes eine obere Schranke (Bound) der erreichbaren kumulativen Güte zuzuweisen und auf Basis dieser Schranke die weitere Baumsuche durchzuführen. Hierbei wird davon ausgegangen, dass Knoten mit einer hohen kumulativen Güte eine besonders hohe Wahrscheinlichkeit haben, Teil der optimalen Lösung zu sein. Daher wird jeweils der Knoten mit der höchsten kumulativen Güte zuerst untersucht (Branch-Schritt).

Bei dem hier betrachteten Problem besteht der Suchbaum nicht nur aus Kanten, welche Stellgrößen und somit deterministischen Entscheidungen entsprechen (wie beim BAB), sondern auch aus Kanten, welche virtuelle Messungen repräsentieren und für welche somit lediglich probabilistische Beschreibungen vorliegen. Dies wird beim *probabilistischen Branch-and-Bound (PBAB)* Algorithmus [10] berücksichtigt.

PBAB Algorithmus

Im Folgenden wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, dass für die Schrittgrößen gilt $g_n \leq 0$. Dies kann, wie in Abschnitt 4.3.2 beschrieben, für endliche Schrittgrößenfunktionen ohne Einfluss auf die Lösung leicht erreicht werden, indem von diesen jeweils ihr Maximalwert abgezogen wird.

Beim PBAB Algorithmus wird ähnlich dem grundlegenden BAB-Algorithmus jedem Knoten ein Datensatz zugewiesen, welcher eine obere Schranke der kumulativen Güte \bar{J} enthält. Darüber hinaus umfasst der Datensatz einen Wahrheitswert t , welcher anzeigt, ob die obere Schranke auch gleichzeitig der wahre Wert ist, also $\bar{J} = J$ gilt, sowie einen Wahrheitswert *visited* der angibt, ob der Knoten bereits besucht wurde. Zu Beginn sind alle \bar{J} mit 0 initialisiert, was eine gültige obere Schranke darstellt, da $g_n \leq 0$ gilt. Die Wahrheitswerte t und *visited* werden ebenfalls mit 0 initialisiert, was FALSE entspricht.

Zu Beginn umfasst der Suchbaum des PBAB-Algorithmus (Algorithmus 6.1) lediglich den Wurzelknoten f_0 . Beginnend vom Wurzelknoten wird bei jedem Durchlauf der Hauptschleife des Algorithmus der Baum zu dem Kindknoten mit dem besten \bar{J} , welches noch nicht sicher bestimmt

Algorithmus 6.1 Probabilistisches Branch-and-Bound

```

1: while  $f_0.t = 0$  do
2:    $\mathcal{V} \leftarrow f_0$ 
3:   while  $\mathcal{V}.visited = 1$  do
4:      $\mathcal{V} \leftarrow$  child of  $\mathcal{V}$  with maximum  $\bar{J}$  and  $t = 0$ 
5:   end while
6:   if  $\mathcal{V} \notin f_N^e$  then
7:      $\mathcal{C} \leftarrow$  EXPANDCHILDREN( $\mathcal{V}$ )
8:     for all children  $\mathcal{C}$  of  $\mathcal{V}$  do
9:        $\mathcal{C}.\bar{J} \leftarrow g(\mathcal{C})$ 
10:       $\mathcal{C}.t \leftarrow 0$ 
11:    end for
12:    PBABUPDATE( $\mathcal{V}$ )
13:   else
14:      $\mathcal{V}.t \leftarrow 1$ 
15:     PBABUPDATE( $\mathcal{V}.parent$ )
16:   end if
17:    $\mathcal{V}.visited \leftarrow 1$ 
18: end while

```

wurde, d. h. $t = 0$, traversiert (Zeilen 2-5). Wenn es sich bei diesem Knoten um kein Blatt handelt (Zeile 6), werden dessen Kinder \mathcal{C} expandiert und den $\mathcal{C}.\bar{J}$ werden deren Schrittgüten g zugewiesen (Zeilen 7-9). Hierbei handelt es sich um eine obere Schranke des wahren J , da alle möglichen nachfolgenden Schrittgüten $g \leq 0$ sind. Da nicht bekannt ist, ob $\mathcal{C}.\bar{J} = \mathcal{C}.J$ gilt, wird $\mathcal{C}.t$ auf 0 gesetzt (Zeile 10). Schließlich wird \bar{J} rekursiv für den aktuellen Knoten sowie seine Vorgängerknoten, wie im nächsten Abschnitt beschrieben, aktualisiert (Zeile 12). Handelt es sich bei dem aktuellen Knoten um ein Blatt, dann gilt $\bar{J} = g = J$ (siehe (6.5)), weshalb in diesem Fall $\mathcal{V}.t$ auf 1 gesetzt wird (Zeilen 13-14). In diesem Fall wird \bar{J} ausgehend vom Vorgängerknoten des aktuellen Knoten rekursiv aktualisiert, was ausreichend ist, da der aktuelle Knoten ein Blattknoten ist und somit keine Kinder hat (Zeile 15). Abschließend wird der Wahrheitswerte *visited* des aktuellen Knotens auf 1 gesetzt.

Update

In jeder Iteration der Hauptschleife des PBAB-Algorithmus wird ein Knoten analysiert. Darauf werden die oberen Schranken der kumulativen Güten \bar{J} gemäß Algorithmus 6.2 rekursiv aktualisiert. Handelt es sich bei dem aktuellen Knoten um den Wurzelknoten oder einen f^e Knoten, so ergeben sich dessen Kinder bei der hier betrachteten alternierenden Sequenz von Prädiktions- und Filterschritten durch einen stellgrößenabhängigen Prädiktionsschritt. Daher kann die kumulative Güte gemäß (6.6) aktualisiert werden (Zeilen 3-4). Darüber hinaus handelt es sich bei dem neuberechneten \bar{J} nicht nur um eine obere Schranke von J , sondern um den exakten Wert, falls die größte Summe der Schrittgüte g und \bar{J} aller Kinder ebenfalls exakt ist (Zeile 5). Diese Tatsache erlaubt das Berechnen der wahren kumulativen Güte, ohne dass immer alle Unterbäume analysiert werden müssen. Handelt es sich bei dem aktuellen Knoten

Algorithmus 6.2 Update für PBAB

```

1: function PBABUPDATE( $\mathcal{V}$ )
2:    $\mathcal{C} \leftarrow$  children of  $\mathcal{V}$ 
3:   if  $\mathcal{V} \in \{f_0, f^e\}$  then
4:      $\mathcal{V}.\bar{J} \leftarrow \max\{g(\mathcal{V}) + \mathcal{C}.\bar{J}\}$ 
5:      $\mathcal{V}.t \leftarrow (\arg \max\{g(\mathcal{V}) + \mathcal{C}.\bar{J}\}).t$ 
6:   end if
7:   if  $\mathcal{V} \in f^p$  then
8:      $\mathcal{V}.\bar{J} \leftarrow E\{\mathcal{C}.\bar{J}\}$ 
9:      $\mathcal{V}.t \leftarrow \min\{\mathcal{C}.t\}$ 
10:  end if
11:  if  $\mathcal{V} \neq f_0$  then
12:    PBABUPDATE( $\mathcal{V}.\text{parent}$ )
13:  end if
14: end function
    
```

um einen f^p Knoten, so ergeben sich dessen Kinder durch Filterschritte, welche abhängig von virtuellen Messwerten sind. Daher kann die kumulative Güte gemäß (6.7) aktualisiert werden (Zeilen 7-8). In diesem Fall handelt es sich bei den Neuberechneten \bar{J} lediglich um exakte Werte, falls die \bar{J} aller Kinder exakt sind, da alle \bar{J} der Kinder in die Berechnung einfließen (Zeile 9). Der Algorithmus wird solange rekursiv fortgesetzt, bis der Wurzelknoten erreicht ist (Zeile 11).

Der PBAB-Algorithmus ist abgeschlossen, sobald die kumulative Güte J berechnet ist, d. h. sobald $f_0.\bar{J}$ einen exakten Wert enthält, was durch $f_0.t = 1$ signalisiert wird (Algorithm 6.1, Zeile 1). Dieses Vorgehen gewährleistet, dass immer die optimale Stellgrößensequenz gefunden wird.

Aufwandsabschätzung

Die Komplexität der Suche mittels PBAB hängt stark von den sich ergebenden oberen Schranken \bar{J} der kumulativen Güten ab. Im ungünstigsten Fall ergeben sich die oberen Schranken derart, dass sich immer die maximale obere Schranke auf der höchsten noch nicht vollständig analysierten Ebene befindet, was typischerweise bei ähnlichen Schrittgütewerten der Fall ist. In diesem Fall muss der gesamte Baum durchsucht werden und PBAB führt zu keiner Reduktion des Berechnungsaufwands. Im günstigsten Fall weisen die Kinder eines f^p -Knoten eine erheblich höhere Schrittgüte als die Kinder dessen Nachbarknoten auf. In diesem Fall muss lediglich ein Unterbaum untersucht werden, was zu einem Baum wie in Abb. 6.8 dargestellt führt. Hierzu sind dann lediglich

$$2 \cdot \sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}| \cdot (L^z)^{n-1})$$

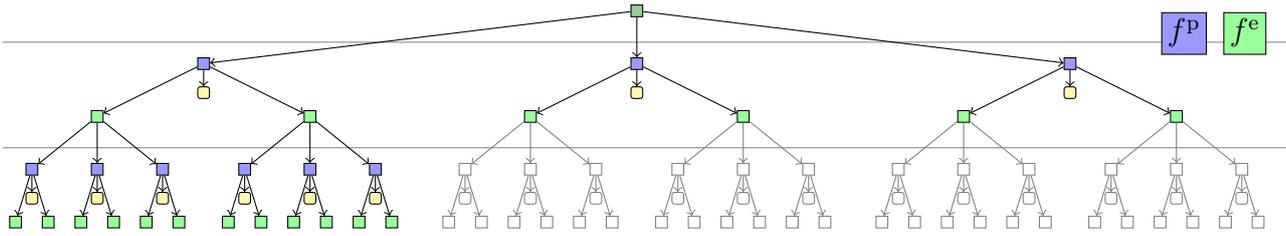


Abbildung 6.8: Optimaler Suchbaum unter Verwendung von PBAB mit $N = 2$ Zeitschritten, $|\mathcal{U}| = 2$ alternativen Stellgrößen und jeweils $L^z = 3$ virtuellen Messungen. In dem exemplarisch dargestellten optimalen Fall müssen die grau gezeichneten Knoten nicht ausgewertet werden.

Prädiktionsschritte zur Berechnung der Dichten f^p und f^M sowie

$$\sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}| \cdot (L^z)^n)$$

Filterschritte zur Berechnung der Dichten f^e notwendig. Ferner muss die Schrittgröße g hier lediglich

$$1 + \sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}| \cdot (L^z)^n)$$

mal berechnet werden. Damit ist in diesem Fall der Berechnungsaufwand nicht mehr polynomiell von der Anzahl der Stellgrößen $|\mathcal{U}|$ mit Exponent N abhängig.

PBAB bei erwartungswertbasierte stellgrößenabhängige Schrittgrößen

Im Falle erwartungswertbasierter stellgrößenabhängiger Schrittgrößen kann PBAB analog angewendet werden, wobei in diesem Fall die Schrittgröße wie in Abschnitt 6.3.1 beschrieben auf Basis der prädizierten Dichten berechnet wird. Im ungünstigsten Fall muss auch hier der komplette Baum untersucht werden, was zu dem in 6.3.1 beschriebenen Berechnungsaufwand führt. Im günstigsten Fall weist hier jeweils ein f^p -Knoten eine erheblich höhere Schrittgröße als seine Nachbarknoten auf, so dass lediglich dessen Unterbaum untersucht werden muss. In diesem Fall müssen

$$\sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}| \cdot (L^z)^{n-1}) + \sum_{n=1}^{N-1} (|\mathcal{U}| \cdot (L^z)^{n-1})$$

Prädiktionsschritte zur Berechnung der Dichten f^p und f^M und

$$\sum_{n=1}^{N-1} ((L^z)^n)$$

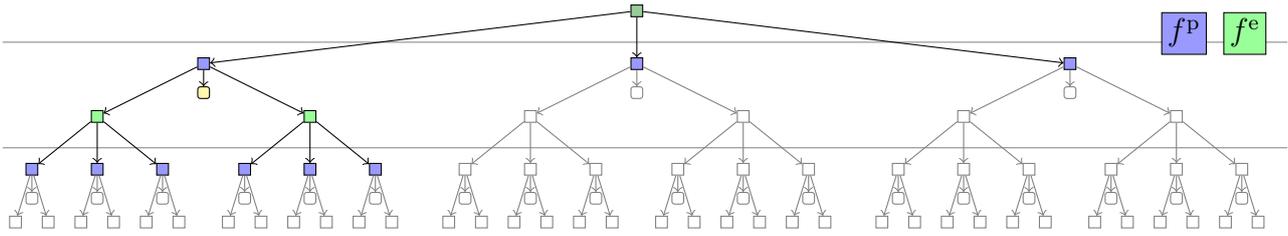


Abbildung 6.9: Optimaler Suchbaum unter Verwendung von PBAB bei erwartungswertbasierter stellgrößenabhängiger Schrittgröße mit $N = 2$ Zeitschritten, $|\mathcal{U}| = 2$ alternativen Stellgrößen und jeweils $L^z = 3$ virtuellen Messungen. In dem exemplarisch dargestellten optimalen Fall müssen die grau gezeichneten Knoten nicht ausgewertet werden.

Filterschritte zur Berechnung der Dichten f^e durchgeführt werden. Ferner muss die Schrittgröße g lediglich

$$\sum_{n=1}^N (|\mathcal{U}| \cdot (L^z)^{n-1})$$

mal ausgewertet werden. Exemplarisch ist ein sich in diesem günstigsten Fall ergebende Suchbaum in Abb. 6.9 dargestellt.

Zusammenfassung der Verfahren zur CLF-I-SNMPC

In diesem Kapitel wurde ein Verfahren zur Stellwertberechnung für die CLF-I-SNMPC vorgestellt. Da hier die Regelung auf Basis geschätzter Zustandsinformationen erfolgt, wurde ein Verfahren vorgestellt, welches dies explizit bei der Bestimmung der Stellwerte berücksichtigt und somit die kombinierten Schätzung und Regelung in integrierter Form gestattet. Als Grundlage dieses Verfahrens wird bei der Regelung das rekursive Vorgehen der Bayes'schen Zustandsschätzung nachempfunden. Da hierzu die Fusion mit Messwerten nötig ist, welche zu dem betrachteten Zeitpunkt noch nicht vorliegen, werden virtuelle Messungen eingeführt, welche die zu erwartenden Messwerte repräsentieren. Diese virtuellen Messungen werden auf Basis prädizierter Wahrscheinlichkeitsdichten zukünftiger Messwerte gütemaßbasiert bestimmt.

Zur Berechnung der notwendigen Prädiktionsschritte werden wiederum Verfahren basierend auf der Approximation der Systemtransitionsdichte mittels einer Gaußmischdichte oder einer hybriden Dichte verwendet. Zur Durchführung der hier notwendigen Filterschritte werden Erweiterungen dieser Verfahren eingesetzt. Durch Verwendung der bereits bei der OLF-SNMPC vorgestellten Verfahren zur Schrittgrößemodellierung kann auch hier eine effiziente probabilistische Auswertung der Gütefunktionen in geschlossener Form erfolgen.

Um die Effizienz des vorgestellten Verfahrens weiter zu erhöhen, wurde zum einen eine besonders effiziente Vorgehensweise zur Berechnung der Gütemaße bei erwartungswertbasierten

stellgrößenabhängigen Schrittweiten beschrieben. Zum anderen wurde ein, ergänzend anwendbares, Verfahren zur effizienten Auswertung des sich ergebenden Suchbaumes vorgestellt, welches eine probabilistische Erweiterung des Branch-and-Bound-Algorithmus darstellt.

Simulationen und Experimente

In diesem Kapitel wird die Effektivität der in Kapitel 4-6 vorgestellten Verfahren zur SNMPC anhand von Experimenten und Simulationen zur Bewegungsregelung miniaturisierter Laufroboter (Anhang A) gezeigt, wobei hierzu die bereits eingeführten Beispielszenarien A: stochastische Lageregelung sowie B: stochastische Bahnplanung verwendet werden.

7.1 Berücksichtigung von Systemunsicherheiten bei der Lageregelung

Zunächst soll der positive Einfluss durch die Berücksichtigung von *Systemunsicherheiten* auf die Qualität der Regelung gezeigt werden. Hierzu wird ein deterministischer NMPC-Regler (CEC, Abschnitt 2.4) mit denjenigen SNMPC-Reglerkonzepten verglichen, welche zwar die probabilistische Systembeschreibung, nicht aber den Einfluss der Zustandsschätzung berücksichtigen, d. h. OLF (Kapitel 4) und CLF-P (Kapitel 5). Dieser Vergleich erfolgt anhand von Beispielszenario A, bei dem sich der miniaturisierte Laufroboter entlang eines Hindernisses, z. B. einer Wand, bewegen soll.

7.1.1 Simulationen

Um einen besonders aussagekräftigen Vergleich der verschiedenen Regler vornehmen zu können und außerdem sekundäre Effekte weitestgehend auszuschließen, werden zunächst Simulationen betrachtet, da somit identische Realisierungen des Mess- und Systemrauschens für die verschiedenen Regler verwendet werden können.

In den Simulationen wird ein Betriebsmodus des Roboters verwendet, bei dem auf die konstante Vorwärtsbewegung Lenkbewegungen superponiert werden, was zu dem nichtlinearen schrittdiskreten kinematischen Modell (2.2) führt. Hierbei ist die Schrittweite $s = 1$ und die möglichen Stellwerte sind $\mathcal{U} = \{-0,2; 0; 0,2\}$ (links, rechts, geradeaus). Das Systemrauschen \mathbf{w}_k^x und \mathbf{w}_k^ϕ wird als weißes Gauß'sches Rauschen mit Standardabweichung $\sigma_w^x = 0,5$ bzw. $\sigma_w^\phi = 0,05 \approx 2,9^\circ$ simuliert.

Da bei diesen Simulationen insbesondere die Berücksichtigung des stochastischen Systemverhaltens betrachtet werden soll und die Effekte der Zustandsschätzung nur eine untergeordnete

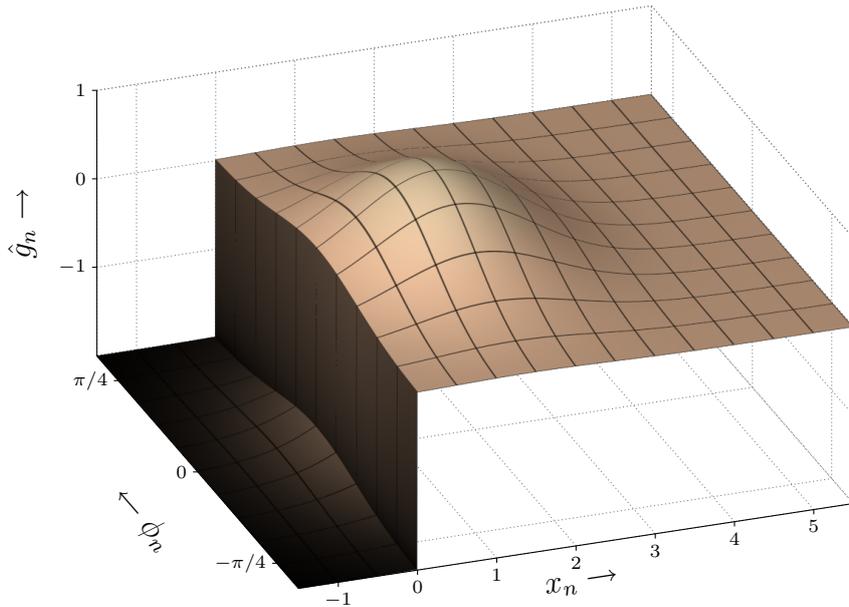


Abbildung 7.1: Gütefunktion \hat{g}_n bestehend aus der Summe einer Gaußfunktion und einem stückweise konstanten Anteil.

Rolle spielen sollen, wird die lineare Messgleichung

$$\begin{bmatrix} z_k^x \\ z_k^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^x \\ \mathbf{v}_k^\phi \end{bmatrix}$$

verwendet. Hier ist der Systemzustand lediglich von einem additiven Rauschterm $\mathbf{v}_k = [\mathbf{v}_k^x, \mathbf{v}_k^\phi]^\top$ überlagert, kann aber sonst direkt gemessen werden. Bei Messrauschen \mathbf{v}_k mit einer großen Kovarianz liegt eine sehr schwache Zustandsrückführung, d. h. ein fast ideales OLF vor. Hat das Messrauschen eine sehr kleine Kovarianz oder kann es sogar komplett vernachlässigt werden, dann kann von einer weitestgehend direkten Zugänglichkeit der Zustände ausgegangen werden, d. h. es liegt ein fast ideales CLF-P vor.

Alle drei hier verglichenen Regler (CEC, OLF, CLF-P) verwenden einen 4-schrittigen Prädiktionshorizont, mit einer für alle 4 Schritte identischen erwartungswertbasierten zustandsabhängigen Gütefunktion $g_n(\mathbf{x}_n) = E_{\mathbf{x}}\{\hat{g}_n(\mathbf{x}_n)\}$, wobei \hat{g}_n in Abb. 7.1 dargestellt ist. Bei \hat{g}_n handelt es sich um die Superposition einer Gaußfunktion und einer stückweise konstanten Funktion. Die Gütefunktion ist derart gewählt, dass das Maximum von \hat{g}_n beim optimalen Abstand zum Hindernis bei $\tilde{x}_n = 1,5$ liegt. Bezüglich des Winkels vom Roboter zum Hindernis liegt das Maximum bei $\phi_n = 0$, so dass eine parallele Ausrichtung des Roboters zum Hindernis bevorzugt werden soll. Im Bereich des Hindernisses ($x_n \leq 0$) wird dem Gaußanteil eine konstante Funktion mit dem Wert -2 als „Strafterm“ additiv überlagert.

Sowohl bei der OLF- als auch bei der CLF-P-SNMPC werden die in Abschnitt 4.1.2 bzw. Abschnitt 5.3 beschriebenen Verfahren zur Stellwertberechnung auf Basis hybrider Transitionsdichten verwendet, so dass die Zustandsdichten durch Gaußmischdichten repräsentiert werden.

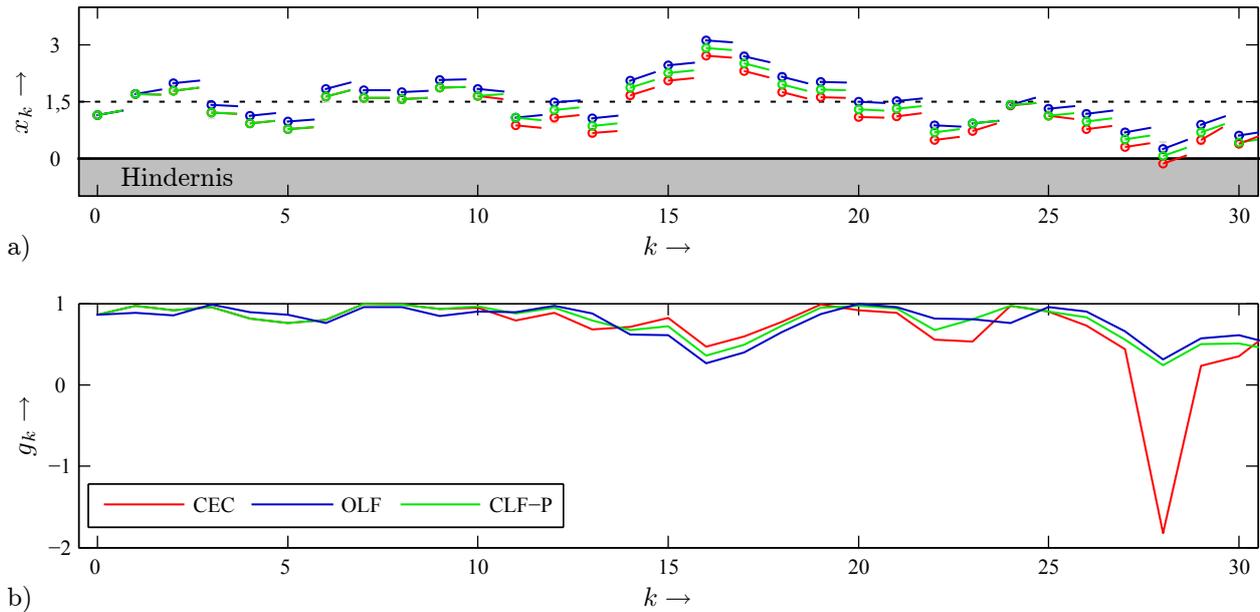


Abbildung 7.2: Beispielszenario A: 30 Schritte eines Simulationslaufs bei Messrauschen mit kleiner Kovarianz (Standardabweichung $\sigma_v = 0,05 = 0,1 \cdot \sigma_w^x$).

Zusammen mit der verwendeten Gütefunktionsmodellierung können somit sämtliche Berechnungen zur Stellwertbestimmung analytisch ausgeführt werden. Die Zustandsschätzung erfolgt analog, wobei die Prädiktion ebenfalls unter Zuhilfenahme hybrider Transitionsdichten erfolgt. Der Filterschritt kann auf Grund der linearen Messgleichung geschlossen mittels einer Bank von Kalman-Filtern berechnet werden. Die Berechnung der beiden stochastischen Regler erfolgt auf Basis der vollständigen geschätzten Dichteinformation, der deterministische CEC-Regler legt lediglich den Mittelwert der Schätzung zugrunde.

In Abb. 7.2 (a) und Abb. 7.3 (a) sind exemplarisch 30-schrittige Simulationsläufe dargestellt. Der Abstand des Roboters zur Wand x_k entspricht der Position der Kreise, die Ausrichtung ϕ_k wird durch die Striche markiert. In einem Simulationslauf werden für alle drei verwendeten Regler identische Realisierungen des System- und Messrauschens verwendet.

Der CEC-NMPC-Regler versucht, unabhängig vom Messrauschen, den Roboter auf das Maximum der Gütefunktion (gestrichelte Linie bei $x = 1,5$) zu regeln. Hierbei findet das stochastische Systemverhalten keinerlei Berücksichtigung. Die beiden stochastischen Regler hingegen führen im Mittel zu einem größeren Abstand zum Hindernis, da sie die nichtsymmetrische Gütefunktion zusammen mit den Systemunsicherheiten und den initialen Schätzunsicherheiten (bei $n = 0$) in der Regelung berücksichtigen. Der OLF-Regler führt in dem vorliegenden Szenario zu einem konservativeren Verhalten, d. h. der Abstand zum Hindernis ist insbesondere in der Nähe des Hindernisses typischerweise etwas größer als der optimale Abstand, da die Zustandsrückführung, welche eigentlich zu einer Reduktion der Unsicherheit führt, innerhalb des Prädiktionshorizonts vernachlässigt wird und somit die Unsicherheit der Zustandsschätzung überschätzt wird. Der CLF-P-Regler hingegen führt typischerweise zu einer leicht überoptimistischen Abschätzung der Unsicherheit innerhalb des Prädiktionshorizontes, da von einer idealen Zustandsrückführung ausgegangen wird. Bei Messrauschen mit kleiner Kovarianz, d. h. schwachem Messrauschen,

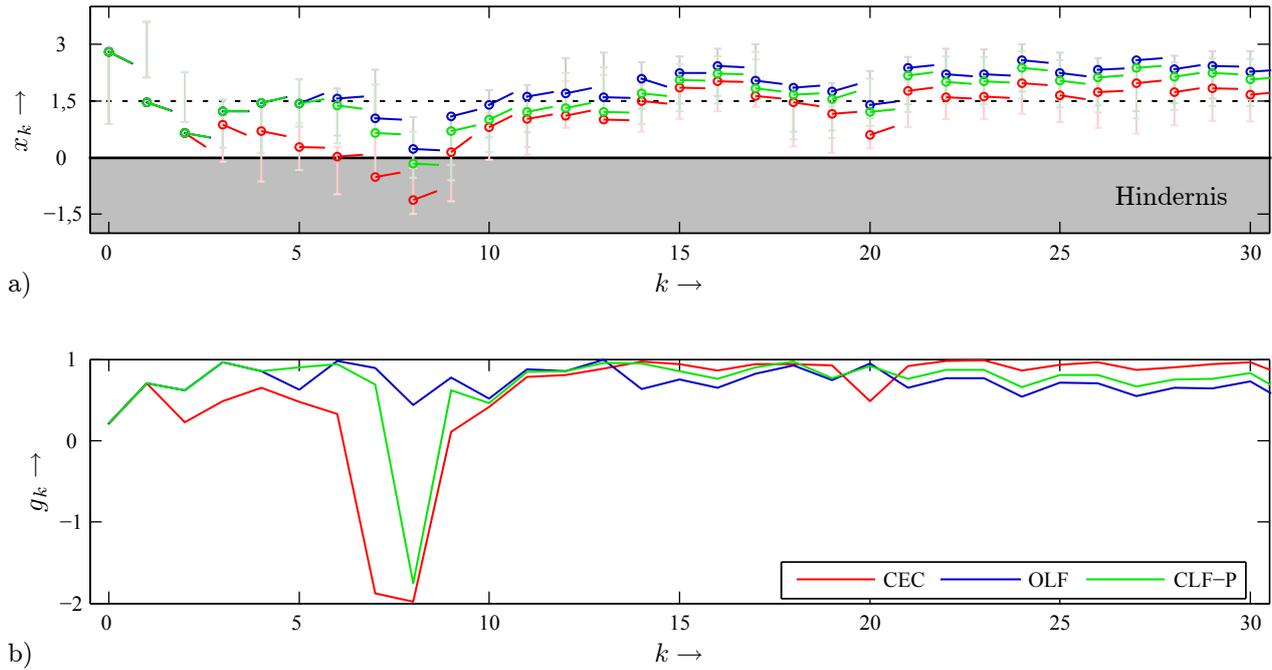


Abbildung 7.3: Beispielszenario A: 30 Schritte eines Simulationslaufs bei Messrauschen mit großer Kovarianz (Standardabweichung $\sigma_v = 1 = 2 \cdot \sigma_w$). Die 1- σ -Grenzen der Positionsschätzung sind mit Balken dargestellt.

(Abb. 7.2) ist dieses Verhalten adäquat, die erreichte Güte ist im Schnitt besser als diejenige bei OLF-Regelung (Abb. 7.2 (b)). Bei Messrauschen mit sehr großer Kovarianz hingegen, d. h. starkem Messrauschen, (Abb. 7.3) führt die überoptimistische Abschätzung der Unsicherheiten dazu, dass der Abstand zum Hindernis zu gering ist, was zu einer im Schnitt niedrigeren Güte als bei der OLF-Regelung führt (Abb. 7.2 (b)). Der deterministische CEC-Regler berücksichtigt im Gegensatz zu den beiden stochastischen Reglern keinerlei Unsicherheiten, was hier zu einer deutlich überoptimistischen Abschätzung der Unsicherheiten führt. Somit wird der Abstand zum Hindernis typischerweise zu niedrig gewählt, was zu einer im Schnitt deutlich niedrigeren Güte als bei den stochastischen Reglern führt, wobei dieser Effekt bei Messrauschen mit einer großen Kovarianz (Abb. 7.3 (b)) ausgeprägter ist als bei Messrauschen mit einer kleinen Kovarianz (Abb. 7.2 (b)).

Die beschriebenen Effekte wurden anhand von Simulationsreihen von jeweils 100 Simulationen mit je 30 Simulationsschritten für Messrauschen mit unterschiedlicher Standardabweichung verifiziert. Innerhalb einer Simulationsreihe werden die Startwerte gleichverteilt aus dem Wertebereich $x_0 \in [1, 6]$ und $\phi_0 \in [-\pi/5, \pi/5]$ variiert. Zur besseren Vergleichbarkeit werden in

Tabelle 7.1: Beispielszenario A: Mittlere kumulative Schrittgröße über 100 Simulationsläufe bei Messrauschen mit unterschiedlicher Standardabweichung.

Standardabweichung Messrauschen	CEC		OLF		CLF-P	
$\sigma_v = 0,001 \cdot \sigma_w$	19,48	(91,8%)	20,72	(97,6%)	21,22	(100,0%)
$\sigma_v = 0,1 \cdot \sigma_w$	19,40	(92,9%)	20,70	(99,1%)	20,89	(100,0%)
$\sigma_v = 2 \cdot \sigma_w$	14,22	(82,8%)	17,19	(100,0%)	16,93	(98,5%)
$\sigma_v = 5 \cdot \sigma_w$	5,07	(42,6%)	11,89	(100,0%)	10,85	(91,2%)



Abbildung 7.4: Experiment zu Beispielszenario A. Das Hindernis ist durch die Bodenmarkierung im unteren Bildteil symbolisiert, wobei der optimale Abstand durch den dünnen Strich markiert ist. Die beiden Roboter in der oberen Bildhälfte dienen als Landmarken zur Abstandsmessung.

allen vier Messreihen identische Realisierungen der Startwerte sowie des Mess- und Systemrauschens, abgesehen von der Skalierung des Messrauschens, verwendet. In Tabelle 7.1 sind die mittleren kumulativen Güten für die drei betrachteten Regler angegeben, wobei zur besseren Vergleichbarkeit jeweils auch normierten Güten angegeben sind, wobei hier die Normierung auf den innerhalb einer Simulationsreihe besten Regler erfolgt. Zum einen zeigt sich, dass die Qualität aller drei Regler mit stärkerem Messrauschen abnimmt. Dieser Effekt ist beim deterministischen Regler besonders ausgeprägt, beim OLF-Regler am geringsten. In den beiden betrachteten Fällen, in denen das Messrauschen kleiner als das Systemrauschen ist, liefert der CLF-P-Regler die beste Qualität. Ist das Messrauschen größer als das Systemrauschen, dann führt der OLF-Regler zu den besten Ergebnissen. Unabhängig von der Größe der Kovarianz des Messrauschens ist die Qualität der stochastischen Regler deutlich besser als die des deterministischen, wobei dieser Unterschied bei großen Kovarianzen noch deutlich ausgeprägter ist als bei kleinen.

7.1.2 Experimente

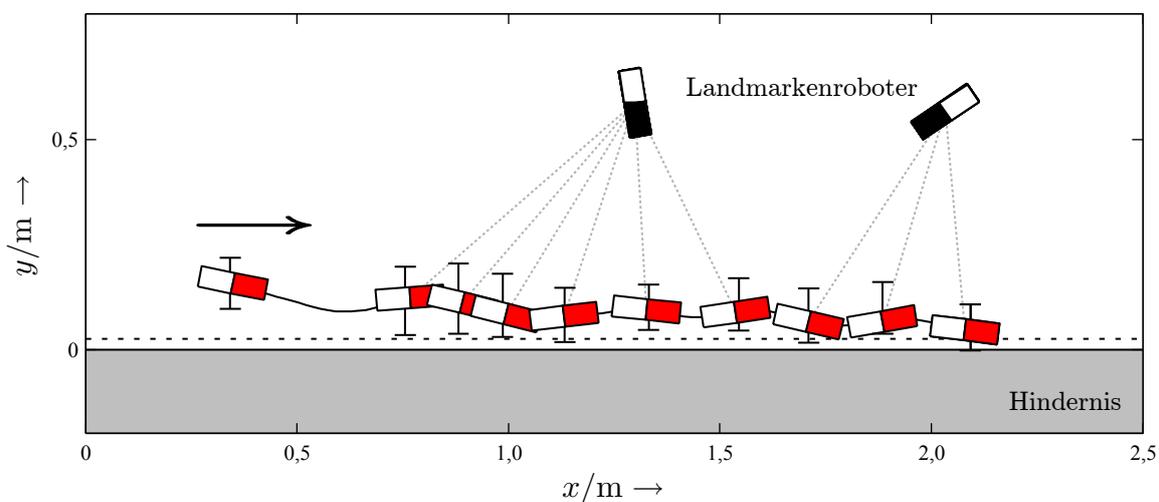
Neben den Simulationen, welche im vorangegangenen Abschnitt beschrieben sind, wurden zum Beispielszenario A auch Experimente mit realen Laufrobotern durchgeführt (Abb. 7.4).

Die Laufroboter werden hier im selben Betriebsmodus wie in den Simulationen betrieben, sodass weiterhin das kinematische Modell (2.2) gilt, wobei hier die möglichen Stellwerte, d. h. Lenkbewegungen $\mathcal{U} = \{-4^\circ; -2^\circ; 0^\circ; 2^\circ; 4^\circ\}$ sind. In den Experimenten wird die Position und Orientierung der Roboter mittels Abstandsmessungen zu anderen Robotern, welche als Landmarken dienen, geschätzt. Dies führt zu der nichtlinearen Messgleichung

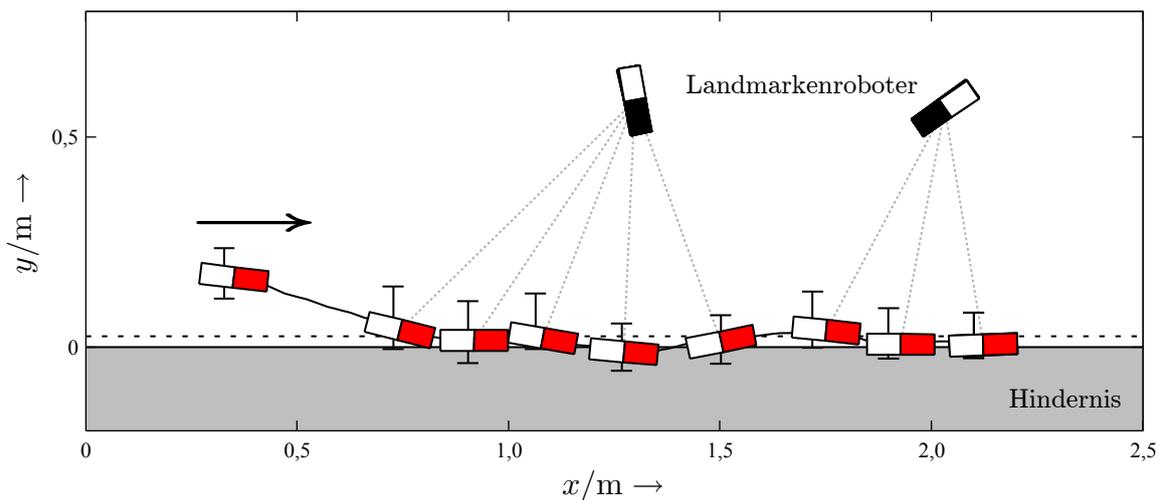
$$z_k = \sqrt{(\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k)^2 + (\mathbf{y}_k - \tilde{\mathbf{y}}_k)^2} + \mathbf{v}_k, \quad (7.1)$$

wobei $[\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{y}}_k]^\top$ die ebenfalls unsicherheitsbehaftete Position des Landmarkenroboters und \mathbf{v}_k das additive Messrauschen bezeichnet. Da diese Abstandsmessungen, wie in Anhang A.4.1

beschrieben, emuliert werden, kann das Messrauschen frei gewählt werden, wobei hier weißes Gauß'sches Rauschen mit einer Standardabweichung von $\sigma^v = 20$ mm verwendet wird. Ferner wird nicht in jedem Schritt eine Abstandsmessung durchgeführt, sondern lediglich, wenn die Positionsschätzung eine vorgegebene Schranke der Standardabweichung überschreitet, d. h. die Schätzung zu unsicher ist. Als Unsicherheitsschranke wird hier eine Standardabweichung von 40 mm verwendet. Wird diese Unsicherheit überschritten, wird gemäß dem in Anhang B beschriebenen Verfahren zur Sensoreinsatzplanung ein möglichst geeigneter Landmarkenroboter ausgewählt, zu dem dann eine Abstandsmessung erfolgt.



(a) Experiment mit OLF-SNMPC-Regelung.



(b) Experiment mit CEC-NMPC-Regelung.

Abbildung 7.5: Beispielszenario A: Experimentallauf mit OLF-SNMPC- bzw. CEC-NMPC-Regelung. In beiden Fällen ist die Startposition des geregelten Roboters (rot, jeweils im unteren Bildbereich) sowie die Position der Landmarkenroboter (jeweils im oberen Bildbereich) identisch. Die Roboter sind jeweils an ihrer wahren Position zum Zeitpunkt einer Abstandsmessung dargestellt, wobei die Partner einer Abstandsmessung durch grau gestrichelte Linien markiert sind. Die geschätzten Positionen der Roboter, auf deren Grundlage die Regelung erfolgt, sind mit 3σ -Grenzen dargestellt (schwarze Balken).

Tabelle 7.2: Beispielszenario A: Ergebnisse von 2×20 Experimentalläufen mit je 100 Schritten.

	OLF	CEC
mittlere kumulative Schrittgüte	94,4	-327,5
Anz. Läufe als Regler mit höchster Güte	17 (85%)	3 (15%)
Anz. Läufe mit Hinderniskontakt	0 (0%)	16 (80%)

Im Folgenden wird ein OLF-SNMPC-Regler mit einem CEC-NMPC-Regler verglichen. Als SNMPC-Regler ist bei den hier vorliegenden Bedingungen ein OLF-Regler besonders geeignet, da in den meisten Schritten keine Messungen erfolgen, also ein OLF vorliegt, und ferner durch die heuristische Sensoreinsatzplanung eine Voraussage der Messzeitpunkte sowie der dann verwendeten Landmarkenroboter nur sehr eingeschränkt möglich ist. Beide Regler verfügen über einen 3-schrittigen Prädiktionshorizont. Die in beiden Reglern verwendete zustandsabhängige Schrittgüte ist der in Abb. 7.1 ähnlich, wobei hier anstelle einer Gaußfunktion die Summe zweier, bis auf ihre ϕ -Position identische, Gaußfunktionen verwendet wird, was dazu führt, dass kleine Abweichungen des Winkels zum Hindernis auch nur einen sehr kleinen Einfluss auf die Güte haben. Der optimale Abstand zum Hindernis, was auch bei $\phi = 0$ dem Maximum der Gütefunktion entspricht, liegt bei 25 mm, wobei an dieser Stelle die Güte 1 ist. Im Bereich des Hindernisses ist eine negative Güte von -20 den Gaußfunktionen superponiert, was einem Strafterm entspricht, wenn der Roboter das Hindernis berührt.

In Abb. 7.5 ist exemplarisch einer der Experimentalläufe für die beiden betrachteten Regler dargestellt. Ähnlich zu den Simulationen in Abschnitt 7.1.1 kann man auch hier deutlich erkennen, dass der Robotern unter stochastischer Regelung (Abb. 7.5(a)) sowohl die Unsicherheiten der Zustandsschätzung zum Zeitpunkt $n = 0$ (dargestellt in Abb. 7.5 durch die schwarzen Balken) zusammen mit dem Systemrauschen berücksichtigt, was dazu führt, dass im Vergleich zum Roboter unter deterministischer Regelung (Abb. 7.5(b)) ein deutlich höherer Sicherheitsabstand zum Hindernis gehalten wird. Der Roboter unter deterministischer CEC-Regelung wird lediglich ausgehend vom Mittelwert der Zustandsschätzung zum Maximum der Gütefunktion hin geregelt, was dazu führt, dass es in dem hier dargestellten Lauf mehrfach zum Hinderniskontakt kommt.

In Tabelle 7.2 sind die Ergebnisse von 2×20 Experimentalläufen mit je 100 Schritten dargestellt, wobei in den einzelnen Läufen sowohl die Startposition des geregelten Roboters als auch die Positionen der Landmarkenroboter bei beiden Reglern jeweils identisch sind. Sowohl in der mittleren erreichten kumulativen Schrittgüte (85,1 bei stochastischer OLF-Regelung gegenüber -300,5 bei deterministischer CEC-Regelung), wobei in 85% der Läufe der stochastische Regler zu einer höheren Güte als der deterministische Regler geführt hat, als auch in der Anzahl der fehlgeschlagenen Läufe, bei der der Roboter Hinderniskontakt hatte (0% der Läufe bei stochastischer OLF-Regelung gegenüber 80% bei deterministischer CEC-Regelung) zeigt sich deutlich der positive Einfluss der Berücksichtigung von Unsicherheiten auf das Ergebnis der Regelung. Hierbei handelt es sich sowohl beim Erreichen einer höheren Güte als auch bei der

Anzahl der erfolgreichen Läufe ohne Hinderniskontakt trotz der recht kleinen Anzahl von 20 Läufen um hochsignifikante Aussagen mit einem p-Wert¹ von 0,02% bzw. 0,13% .

7.2 Berücksichtigung von System- und Messunsicherheiten bei der Bahnplanung

In diesem Abschnitt soll neben dem Einfluss von Systemunsicherheiten auf die Regelung, welcher bereits im letzten Abschnitt betrachtet wurde, auch der *Einfluss von unsicheren Messungen* gezeigt werden und wie durch Berücksichtigung dieser Effekte die Qualität der Regelung signifikant gesteigert werden kann. Hierzu erfolgt der Vergleich eines CLF-I-SNMPC Reglers (Kapitel 6), welcher System- und Messunsicherheiten berücksichtigt, mit einem OLF-SNMPC-Regler, welcher lediglich Systemunsicherheiten berücksichtigt und einem deterministischen CEC-NMPC Reglers, welcher weder System- noch Messunsicherheiten berücksichtigt. Dieser Vergleich erfolgt anhand von Beispielszenario B, bei dem der miniaturisierte Laufroboter (Anhang A) in einer Umgebung mit Hindernissen eine Zielregion erreichen soll.

Die Umgebung, in der sich der Roboter bewegen soll (Abb. 7.6 a)) wird mit einer zustandsabhängigen erwartungswertbasierten Gütefunktion wie in Abb. 7.6 b) dargestellt modelliert. Die Zielregion (hell) bei $[90, 50]^T$ wird mit Gaußfunktionen mit einem Maximalwert von 1 modelliert. Hindernissen, z. B. Wänden, wird ein additiv superponierter Strafterm von -2 zugewiesen (dunkel). Der Roboter wird in einem Modus betrieben, bei dem auf die konstante Vorwärtsbewegung Lenkbewegungen superponiert werden, was zu dem nichtlinearen schrittdiskreten kinematischen Modell

$$\underline{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \phi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_k^s \cdot \cos(\phi_k + u_k^\phi) \\ \mathbf{y}_k + u_k^s \cdot \sin(\phi_k + u_k^\phi) \\ \phi_k + u_k^\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k^x \\ \mathbf{w}_k^y \\ \mathbf{w}_k^\phi \end{bmatrix},$$

führt, welches (A.2) ohne Seitwärtsbewegung entspricht. Der Zustandsvektor $\underline{\mathbf{x}}_k = [\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \phi_k]^T$ umfasst hier die Position und Orientierung des Roboters in der Ebene. Der Stellgrößenvektor $\underline{\mathbf{u}}_k = [u_k^s, u_k^\phi]^T$ ist die gewünschte Schrittweite u_k^s in Vorwärtsrichtung und der gewünschte Lenkwinkel u_k^ϕ . Insgesamt gibt es sieben mögliche vektorwertige Stellwerte

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -45^\circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -45^\circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -22,5^\circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 0^\circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 22,5^\circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 45^\circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 45^\circ \end{bmatrix} \right\}.$$

Das Systemrauschen des Roboters $\underline{\mathbf{w}}_k = [\mathbf{w}_k^x, \mathbf{w}_k^y, \mathbf{w}_k^\phi]^T$ wird als weißes Gauß'sches Rauschen mit Standardabweichung $\sigma^x = \sigma^y = 1,5$ bzw. $\sigma^\phi = 3^\circ$ simuliert. Wie beim Experiment in letzten Abschnitt wird auch hier Position und Orientierung der Roboter mittels Abstandsmessung zu

¹ Der p-Wert des Signifikanztestes gibt an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit eines gleich guten oder besseren Ergebnisses wäre, wenn die H_0 -Hypothese gilt, dass die Qualität der Verfahren identisch ist. Ist diese Wahrscheinlichkeit unter 5%, wird die überprüfte Aussage (H_1 -Hypothese) als signifikant bezeichnet, ist die Wahrscheinlichkeit unter 1%, als hochsignifikant.

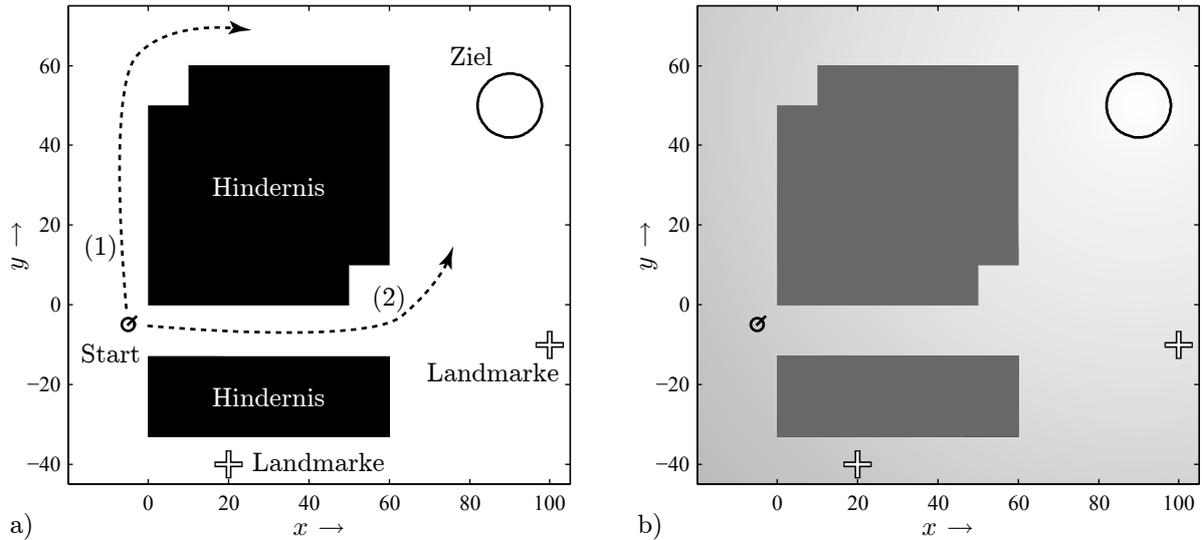


Abbildung 7.6: Beispielszenario B: Umgebung mit Hindernissen, Startposition des Roboters bei $\underline{x}_0 = [-5, -5, 45^\circ]^\top$, Zielregion bei $[90, 50]^\top$ a) Ausgangssituation, Hindernisse sind schwarz dargestellt b) Modellierung mittels Gütefunktion aus superponierten Gaußfunktionen und stückweise konstanten Funktionen.

Landmarken bestimmt, weshalb ebenfalls Messgleichung (7.1) gilt, wobei das additive weiße Gauß'sche Messrauschen mit Standardabweichung $\sigma^v = 0,25$ simuliert wird.

Im Folgenden werden zwei Szenarien mit identischen Schrittgütefunktionen (Abb. 7.6) betrachtet, welche sich lediglich in den Messraten zu verschiedenen Landmarken unterscheiden. Der Roboter, welcher bei $\underline{x}_0 = [-5, -5, 45^\circ]^\top$ startet, hat zwei Alternativen um die Zielregion bei $[90, 50]^\top$ zu erreichen: (1) den linken Pfad, welcher länger aber auch breiter ist sowie (2) den rechten Pfad, welcher kürzer aber auf Grund des Hindernisses im unteren Bereich auch schmaler und somit schwieriger zu nutzen ist. Im Szenario a) gibt es eine primäre Landmarke bei $[20, -40]^\top$, zu welcher zu jedem Zeitschritt k eine Abstandsmessung durchgeführt wird. Ferner gibt es eine zweite Landmarke bei $[100, -10]^\top$, zu welcher zusätzlich in jedem vierten Zeitschritt gemessen wird. In Szenario b) ist die Position der primären und der sekundären Landmarke vertauscht. In Szenario a) (Abb. 7.7 a)) führt die Position der primären Landmarke bei $[20, -40]^\top$ im relevanten Bereich insbesondere in y -Richtung zu hochqualitativen Positionsschätzungen. Dies ist besonders im engen Bereich des rechten Pfades wichtig. In Szenario b) (Abb. 7.7 b)) führt die Position der primären Landmarke bei $[100, -10]^\top$ insbesondere in x -Richtung zu hochqualitativen Positionsschätzungen. Die Qualität der Positionsschätzung in y -Richtung ist hier deutlich niedriger als im ersten Szenario.

Zur Berechnung der CLF-I-SNMPC-Stellwerte werden die Verfahren aus Kapitel 6 eingesetzt. Sowohl die Prädiktionen als auch die Filterung mit virtuellen Messungen, wobei hier jeweils lediglich eine virtuelle Messung pro Schritt verwendet wird, geschieht wie beschrieben auf Basis hybrider Transitionsdichten. Ebenso werden die prädizierten Zustandsdichten zur Berechnung der OLF-Stellwerte sowie die Wahrscheinlichkeitsdichten der geschätzten Roboterpositionen,

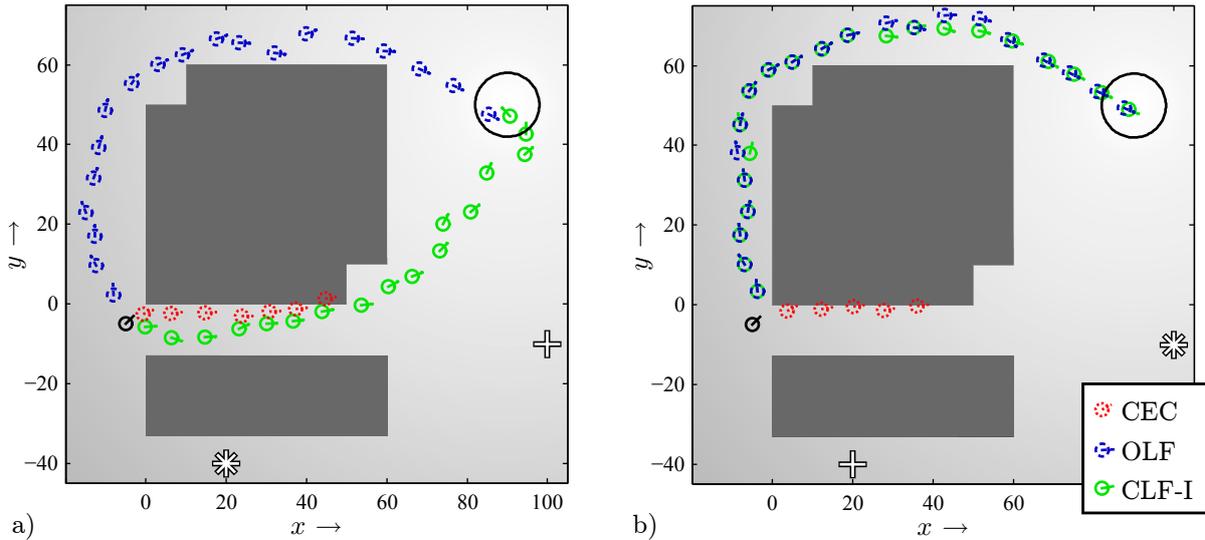


Abbildung 7.7: Beispielszenario B: Simulationsläufe mit primärer Landmarke zur Abstandsmessung bei a) $\tilde{x} = 20$, $\tilde{y} = -40$ und b) $\tilde{x} = 100$, $\tilde{y} = -10$. Die Simulationen werden beendet, wenn ein Roboter gegen ein Hindernis trifft.

welche als Grundlage für alle drei Reglervarianten dienen, mittels hybrider System- und Mess-Transitionsdichten berechnet. Somit kann die Stellwertberechnung bei allen drei Reglern analytisch erfolgen. Für den deterministischen CEC-NMPC-Regler werden ferner zur Berechnung der Stellwerte die Gütefunktionsanteile der Hindernisse um jeweils zwei Längeneinheiten vergrößert, um so sicherzustellen, dass obwohl dieser Regler jeglichen Rauscheinfluss vernachlässigt, der Roboter nicht sofort gegen ein Hindernis stößt. Alle drei Regler verwenden einen 3-schrittigen Prädiktionshorizont.

In Abb. 7.7 ist jeweils ein exemplarischer Simulationslauf für die beiden betrachteten Szenarien dargestellt. Unabhängig von der Anordnung der Landmarken wählt der Roboter unter deterministischer CEC-Regelung in beiden Fällen den kürzeren rechten Pfad und stößt dann gegen ein Hindernis, da bei CEC-Regelung jegliche stochastischen Effekte ignoriert werden, d. h. die vorhandenen Unsicherheiten deutlich unterschätzt werden. Der Roboter unter stochastischer OLF-Regelung wählt jeweils wiederum unabhängig von der Anordnung der Landmarken den breiteren aber längeren linken Pfad, da durch die OLF-Annahme die Unsicherheiten überschätzt werden. Bei Verwendung des CLF-I-Reglers verhält sich der Roboter abhängig von der Anordnung der Landmarken unterschiedlich in den beiden Szenarien. In Szenario a) gestatten die Abstandsmessungen genaue Positionsschätzungen in y -Richtung, weshalb die Wahl des rechten Pfades hinreichend sicher ist. Da dies bei der CLF-I-Regelung berücksichtigt wird, wird der rechte kürzere Pfad vom Roboter verwendet. In Szenario b) liefern die Abstandsmessungen in y -Richtung keine hinreichend hohe Schätzgenauigkeit. Somit wird vom CLF-I-Regler der linke breitere Pfad gewählt.

Für jedes der beiden Szenarien wurden je 100 Simulationsläufe mit den drei betrachteten Reglern durchgeführt (Tabelle 7.3), wobei jeweils identische Rauschrealisierungen für die unterschiedlichen Regler verwendet wurden. Beide stochastischen Regler (OLF und CLF-I) erreichen

Tabelle 7.3: Beispielszenario B: Ergebnisse von 100 Simulationsläufen.

	a) Primäre Landmarke bei $[20, -40]^T$			b) Primäre Landmarke bei $[100, -10]^T$		
	CLF-I	OLF	CEC	CLF-I	OLF	CEC
Zielregion erreicht	98%	100%	50%	96%	98%	46%
Benötigte Schritte bis Zielregion	15,9	20,7	15,1	20,6	20,7	15,2
mittlere kumulative Schrittgröße	20,7	18,4	19,9	18,6	18,5	18,7

in der großen Mehrheit der Fälle sicher die Zielregion ($\geq 96\%$), wohingegen dies beim deterministischen CEC-Regler nur in höchstens 50% der Läufe der Fall ist. In Szenario a) wird vom CLF-I-Regler der kürzere Weg gewählt, sodass lediglich im Mittel 15,9 Schritte zum Erreichen der Zielregion notwendig sind. Die höhere Leistungsfähigkeit des CLF-I-Reglers zeigt sich auch bei der mittleren kumulativen Schrittgröße über die ersten 25 Schritte, wobei hier nur diejenigen Roboter berücksichtigt werden, welche nicht gegen ein Hindernis treffen.

In dem betrachteten Fall mit einem 3-schrittigen Horizont und $L^z = 1$ virtuellen Messungen müsste zur Berechnung des CLF-I-Stellwerts ein Suchbaum mit 722 Knoten ausgewertet werden. Durch Verwendung der in Abschnitt 6.3 vorgestellten Verfahren, insbesondere dem probabilistischen Branch-and-Bound (Abschnitt 6.3.2) kann der benötigte Berechnungsaufwand etwa um den Faktor 8 reduziert werden. Bei längeren Prädiktionshorizonten oder einer höheren Anzahl von Stellgrößen kann typischerweise eine noch weit deutlichere Aufwandsreduktion erzielt werden.

Zusammenfassung der Simulationen und Experimente

In diesem Kapitel wurde die Effektivität der in den vorangegangenen drei Kapiteln beschriebenen Verfahren zur SNMPC anhand von Simulationen und Experimenten gezeigt. Hierzu wurden die Beispielszenarien zur stochastischen Lageregelung und zur stochastischen Bahnplanung eines miniaturisierten Laufroboters, welche bereits in vorhergehenden Kapitel eingeführt wurden, aufgegriffen.

Sowohl in den Simulationen als auch in den Experimenten konnte eine signifikante Verbesserung der Regelungsqualität durch eine Berücksichtigung von Unsicherheiten erzielt werden.

Ferner konnte gezeigt werden, welchen Einfluss das Messrauschen bzw. die Zugänglichkeit der Zustände auf die Effektivität der verschiedenen SNMPC-Verfahren hat. Auch wenn die Effekte der Zustandsschätzung nicht explizit in der Regelung berücksichtigt wurden, wie dies bei einer CLF-I-SNMPC der Fall wäre, konnte durch eine passende Wahl des SNMPC-Verfahrens die Qualität der Regelung positiv beeinflusst werden. Es konnte gezeigt werden, dass eine OLF-Regelung einer CLF-P-Regelung bei Messrauschen mit großer Kovarianz typischerweise überlegen ist, sowie dass bei Messrauschen mit kleiner Kovarianz eine CLF-P-Regelung bessere Ergebnisse als eine OLF-Regelung liefert.

Schließlich konnte gezeigt werden, dass durch eine explizite Berücksichtigung der Effekte der Zustandsschätzung, wie es bei der vorgestellten CLF-I-SNMPC geschieht, eine Regelung erfolgen kann, welche direkt die Qualität zukünftiger Zustandsinformationen berücksichtigt und auf diese adäquat reagiert.

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden neuartige Verfahren zur Regelung nichtlinearer Systeme unter Berücksichtigung stochastischer Unsicherheiten vorgestellt. Einsatzgebiete dieser Verfahren sind neben der Regelung von Robotern, welche hier exemplarisch betrachtet wird, alle diejenigen Bereiche, in denen technische Systeme mit einem nichtlinearen Systemverhalten bzw. einer nichtquadratischen Gütefunktion unter starkem Rauscheinfluss hochgenau geregelt werden sollen. Hierzu zählen unter anderem die chemische Prozessindustrie, die Fahrzeugtechnik sowie die Luft- und Raumfahrt.

Der hier verfolgte Ansatz basiert auf der modell-prädiktiven Regelung, bei welcher der Systemzustand stellgrößenabhängig innerhalb eines endlichen Horizontes prädiziert und mittels einer Gütefunktion bewertet wird. Auf Basis dieses Gütemaßes wird der optimale Stellwert ausgewählt, welcher dann zur eigentlichen Regelung verwendet wird. Bei den hier entwickelten Verfahren erfolgt eine stochastische Zustandsprädiktion auf Basis probabilistischer Systemmodelle. Somit werden die prädizierten Systemzustände mit einer vollständigen Wahrscheinlichkeitsdichte und nicht, wie bei der deterministischen modell-prädiktiven Regelung üblich, lediglich mit einem festen Wert, beschrieben. Bei den in dieser Arbeit betrachteten Systemen handelt es sich insbesondere um Systeme mit kontinuierlichwertigen Zuständen und diskreten Stellgrößen.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren zur stochastischen nichtlinearen modell-prädiktiven Regelung berücksichtigen sowohl explizit den Einfluss des Systemrauschens als auch die Zugänglichkeit der Zustandsgrößen. Da die sich ergebenden stochastischen Optimierungsprobleme im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar sind, wurden effiziente approximative Lösungen vorgestellt. Diese basieren auf einer Kombination der nichtlinearen stochastischen Zustandsschätzung mittels Approximation der Systemtransitionsdichte, wobei hier zwei alternative Verfahren verwendet werden, mit einer speziellen Modellierung der Gütemaße auf Basis verschiedener Funktionsklassen, wie klassischen polynomiellen Gütefunktionen sowie auch Gaußmischgütefunktionen. Die Kombination dieser Techniken gestattet die probabilistische Auswertung der Gütefunktionen auf sehr effiziente Weise in geschlossener Form.

Bezüglich der Zustandszugänglichkeit wurden drei relevante Fälle unterschieden, für die, jeweils unter Verwendung der effizienten Zustandsprädiktion mittels Transitionsdichteapproximation und den speziellen Modellierungen der Gütemaße, entsprechende Verfahren zur effizienten Stellwertbestimmung vorgestellt wurden.

Beim Open-Loop-Feedback (OLF) wird der Zustand innerhalb des betrachteten Prädiktionshorizonts als nicht zugänglich modelliert, d. h. die Bestimmung der Stellwerte erfolgt unter der Annahmen, dass keine Zustandsrückführung vorliegt. Somit kann hier die Stellwertberechnung direkt durch Auswahl der optimalen Stellwerte auf Basis stellwertabhängig-prädizierter Gütemaße erfolgen. Hierzu wurden in dieser Arbeit effiziente Verfahren auf Basis der Techniken zur Prädiktion und probabilistischen Auswertung der Gütefunktionen beschrieben, welche eine Berechnung der Stellwerte in geschlossener Form erlauben. Ferner wurde die Erweiterung um einen effizienten Algorithmus zur Baumsuche beschrieben, was zu einer weiteren Effizienzsteigerung führt.

Beim Closed-Loop-Feedback mit direkt zugänglichen Zuständen (CLF-P) wird innerhalb des betrachteten Horizonts von einer direkten Zustandsrückführung ausgegangen. Hierzu wurden zur Berechnung der Stellwerte zwei Verfahren basierend auf der dynamischen Programmierung vorgestellt. Diese basieren wiederum auf der Approximation der Systemtransitionsdichte und gestatten durch Approximation sowie Interpolation der kumulativen Gütefunktionen der dynamischen Programmierung eine besonders effiziente Berechnung. Bei zeitinvarianten System- und Gütefunktionen kann durch eine Vorberechnung der kumulativen Gütefunktion die Effizienz noch weiter deutlich gesteigert werden.

Im dritten Fall, dem Closed-Loop-Feedback mit nicht direkt zugänglichen Zuständen (CLF-I), wird bei der Stellwertbestimmung davon ausgegangen, dass innerhalb des betrachteten Horizonts lediglich eine stochastische Schätzung des Zustands vorliegt. Hierzu wurde in dieser Arbeit ein Verfahren vorgestellt, welches explizit die Effekte der Zustandsschätzung bei der Regelung berücksichtigt. Somit ergibt sich zusammen mit der Zustandsschätzung ein integriertes Verfahren zur kombinierten Schätzung und Regelung. Hierzu wird bei der Stellwertbestimmung das rekursive Vorgehen der Bayes'schen Zustandsschätzung nachempfunden, was mit Hilfe so genannte virtuelle Messungen geschieht, welche die zu erwartenden Messwerte repräsentieren. Dabei werden zunächst Wahrscheinlichkeitsdichten der zu erwartenden Messwerte bestimmt, auf Basis derer dann gütemaßbasiert möglichst repräsentative virtuelle Messungen generiert werden. Zur Erhöhung der Effizienz wurde außerdem ein Verfahren zur effizienten Auswertung des Suchbaumes beschrieben, welches eine probabilistische Erweiterung des Branch-and-Bound Algorithmus darstellt.

Die Effektivität der vorgestellten SNMPC-Verfahren und die signifikante Steigerung der Qualität der Regelung, welche durch eine Berücksichtigung von stochastischen Unsicherheiten erreicht werden kann, wurde anhand von Experimenten und Simulationen zur stochastischen Lageregelung sowie zur stochastischen modell-basierten Bahnplanung für Laufroboter gezeigt.

Insbesondere wurde gezeigt, wie neben dem Einfluss von Systemrauschen auch die Berücksichtigung von Messrauschen und Messfunktion einen erheblichen Einfluss auf die Qualität der Regelung hat und wie durch Berücksichtigung dieser stochastischen Effekte ein deutlich anderes, signifikant besseres Systemverhalten erzielt werden kann. Die hierzu eingesetzten miniaturisierten Laufroboter wurden ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit entwickelt.

Auf Grundlage der in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren sind eine Vielzahl von Modifikationen und Erweiterungen denkbar. Hierzu zählen einerseits Erweiterungen in Teilaspekten, etwa in der Verwendung problemspezifischer Filterverfahren, was auf Grund des Framework-Charakters der vorgestellten Verfahren direkt möglich ist. Andererseits sind aber auch generelle Erweiterungen, wie etwa die Berücksichtigung kontinuierlichwertiger Stellgrößen, was eine Vielzahl weiterer Anwendungen eröffnen würde, wünschenswert. Von besonderem Interesse ist auch die Dezentralisierung der Algorithmen, so dass diese bei räumlich verteilten Systemen auf lokalen Rechenressourcen ausgeführt oder aber auch zur Reduzierung der Rechenzeit auf Parallelrechnern eingesetzt werden können. Zur Verminderung des benötigten Berechnungsaufwands ist eine weitere Analyse suboptimaler Verfahren sowie die explizite Berücksichtigung von Spezialfällen, wie z. B. zeitinvarianten Systemmodellen oder zeitinvarianten Gütefunktionen vielversprechend. Darüber hinaus könnten die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren auch als Grundlage für Verfahren zur stochastischen Regelung verteilter Systeme, welche z. B. durch eine partielle Differenzialgleichung beschrieben werden können, dienen. Außerdem wäre eine Erweiterung um eine simultane Sensoreinsatzplanung und/oder eine simultane Identifikation der Systemparameter von großem Interesse, da somit eine Integration von Sensoreinsatzplanung, Parameteridentifikation, Zustandsschätzung und stochastischer Regelung realisiert werden könnte.

ANHANG A

Laufroboter

In diesem Anhang wird der technische Aufbau der verwendeten miniaturisierten Laufroboter beschrieben. Eine erste, mittlerweile stark modifizierte Version der Roboter wird in [3] vorgestellt. Die aktuelle, im Folgenden vorgestellte Version der Roboter entspricht in weiten Zügen der aus [8], [Omi07]. Das grundlegende Lokomotionsprinzip ist unverändert, wobei die Größe der Roboter reduziert und die Geschwindigkeit erhöht werden konnte.

Der omnidirektionale Roboter (Abb. A.1), dessen CAD-Modell in Abb. A.2 dargestellt ist, verfügt über ein Rumpfmodul (blau) sowie drei Beine (gelb) mit jeweils einem Fuß (rot). Die Beine sind über Linearlager mit dem Rumpf derart verbunden, dass sich das vordere und hintere Bein seitwärts und das mittlere Bein vor- und rückwärts bewegen kann. Die Füße können jeweils unabhängig von den anderen Freiheitsgraden ein- und ausgefahren werden. Durch die symmetrische Struktur verfügt der Roboter über kein dediziertes Front oder Heck, sodass sich dies lediglich durch die Bewegungsrichtung ergibt.

A.1 Bewegungsmuster

Die Bauweise des Roboters gestattet eine Bewegung in verschiedenen Bewegungsmustern, wobei sämtliche dieser Bewegungsmuster aufgrund der Unabhängigkeit der Freiheitsgrade superponiert werden können.

Das erste wichtige Bewegungsmuster ist die Vorwärtsbewegung, welche in Abb. A.3 als Seitenansicht dargestellt ist. Hierzu wird zunächst der mittlere Fuß angehoben, das mittlere Bein nach vorne bewegt und dann der Fuß wieder gesenkt (Abb. A.3 a)-c)). Darauf werden der vordere und hintere Fuß angehoben (Abb. A.3 d)) und der Rumpf relativ zum mittleren Bein, welches zu diesem Zeitpunkt das Standbein ist, nach vorne bewegt (Abb. A.3 e)). Schließlich werden vorderer und hinterer Fuß wieder gesenkt. Somit ist der Roboter wieder in der Ausgangsstellung und der nächste Schritt kann direkt folgen.

Das zweite wichtige Bewegungsmuster ist die Drehung. In Abb. A.4 sind die notwendigen Schritte für eine Drehung des Roboters in Draufsicht dargestellt, wobei der Rumpf transparent gezeichnet ist. Zuerst werden der vordere und der hintere Fuß angehoben (Abb. A.4 a)). Dann wird für eine Drehung im Uhrzeigersinn das vordere Bein nach rechts und der hintere Bein

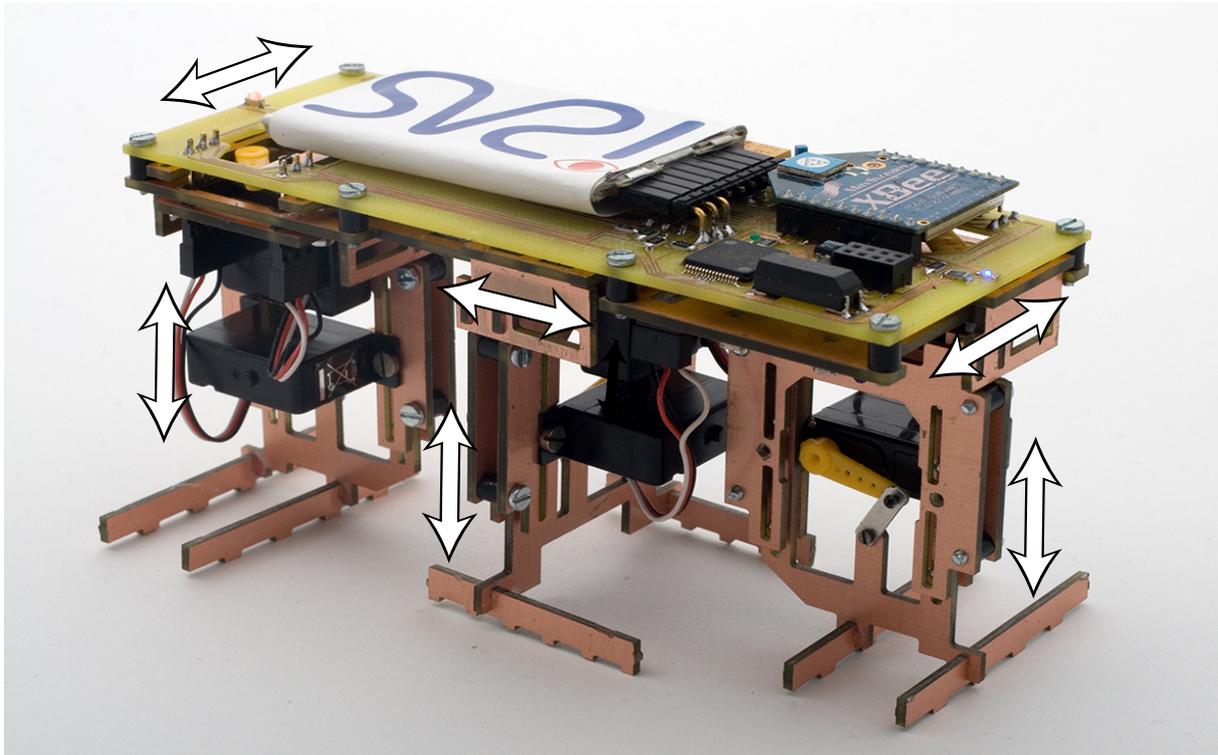


Abbildung A.1: Miniaturisierter Laufroboter. Die Freiheitsgrade sind mit Pfeilen gekennzeichnet.

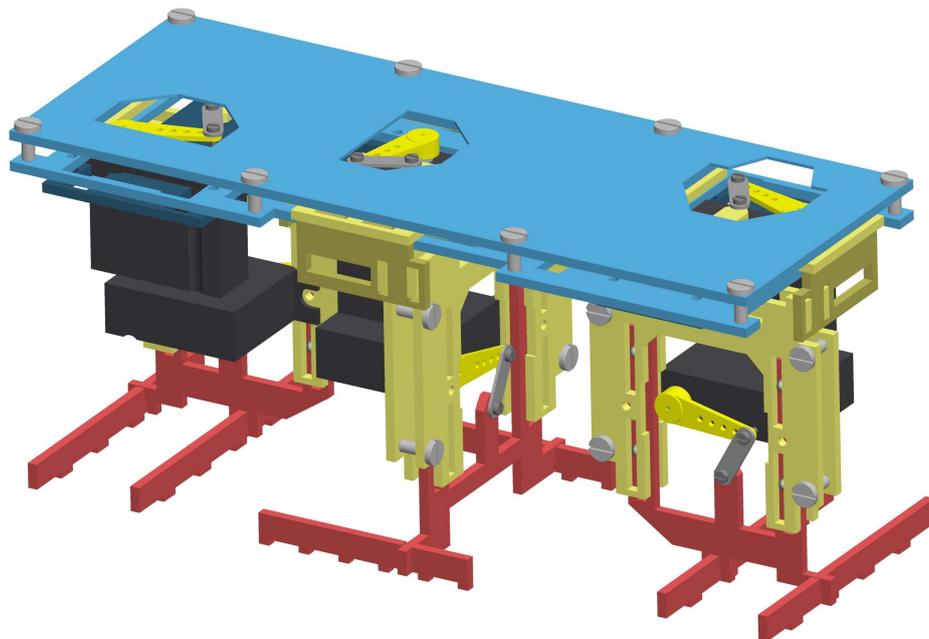


Abbildung A.2: CAD-Modell des Roboters. Der Rumpf ist in blau, die drei Beine sind in gelb und die Füße in rot dargestellt. Die sechs Antriebsservos sind schwarz mit gelben Armen.

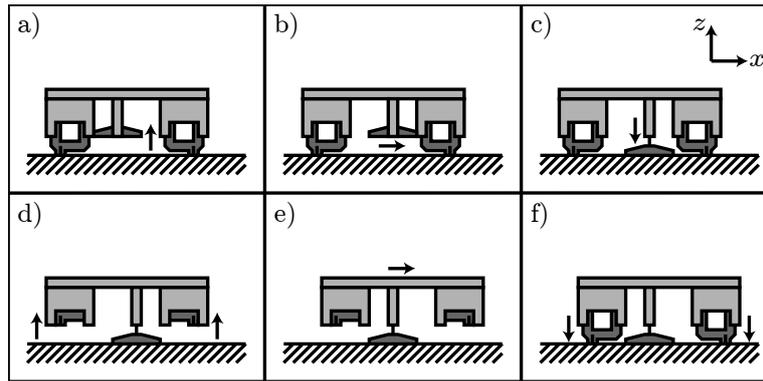


Abbildung A.3: Vorwärtsschritt des Roboters (Seitenansicht).

nach links bewegt (Abb. A.4 b)). Danach werden der vordere sowie der hintere Fuß wieder gesenkt und der mittlere Fuß angehoben (Abb. A.4 c)-d)). Um nun die eigentliche Drehung auszuführen, werden vorderes und hinteres Bein in ihre Ausgangsposition bewegt, was in einer Drehung des Rumpfes um die Mittelachse des Roboters resultiert (Abb. A.4 e)). Schließlich wird der mittlere Fuß wieder gesenkt und der Roboter ist in seiner Ausgangsstellung.

Durch eine geringfügige Modifikation des Drehungs-Bewegungsmusters kann der Roboter auch seitwärts laufen. Hierzu muss im zweiten Schritt der Bewegung (für die Drehung in Abb. A.4 b) dargestellt) die Bewegung der Beine nicht gegenläufig, sondern in die selbe Richtung erfolgen, was, wenn der fünfte Schritt auch entsprechend angepasst wird, zu einem Seitwärtsschritt des Roboters führt.

Neben diesen drei grundlegenden Bewegungsmustern ist eine Vielzahl weiterer Bewegungsmuster möglich. Wenn z. B. bei der oben beschriebenen Drehung lediglich das vordere Bein seitwärts bewegt wird, führt dies zu einer Drehung des Roboters um eine Rotationsachse, welche durch den hinteren Fuß und nicht durch den Mittelpunkt des Roboters verläuft. Alle Bewegungsmuster können auch überlagert ausgeführt werden, da alle Freiheitsgrade des Roboters unabhängig sind. Somit ist eine omnidirektionale Bewegung des Roboters mit unterschiedlichen zugrundeliegenden kinematischen Modellen möglich, wobei auch hochgenaue Schritte mit einer Schrittweite unter 1 mm möglich sind. Ebenso kann die Schritthöhe beliebig zwischen wenigen Millimetern und maximal 20 mm variiert werden. Somit kann sowohl eine schnelle Schrittfolge bei kleiner Schritthöhe, als auch eine Bewegung über unebenen Untergrund und kleinere Hindernisse bei großer Schritthöhe erfolgen.

A.2 Kinematisches Modell

Zur modellbasierten Zustandsschätzung und Regelung, welche Gegenstand dieser Arbeit ist, bedarf es eines kinematischen Modells des Roboters. Bei Superposition der Vorwärts- und Seitwärtsbewegung sowie der Drehung um die Mittelachse kann die omnidirektionale Bewegung

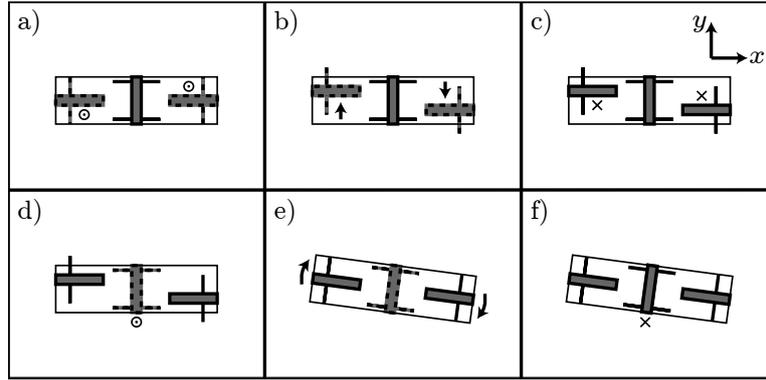


Abbildung A.4: Drehung des Roboters (Draufsicht mit transparentem Rumpf, gehobene FüÙe sind gestrichelt dargestellt).

des Roboters in der Ebene durch das schrittdiskrete nichtlineare kinematische Modell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \phi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_k) & -\sin(\phi_k) & 0 \\ \sin(\phi_k) & \cos(\phi_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k^F \\ s_k^S \\ \omega_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k^x \\ \mathbf{w}_k^y \\ \mathbf{w}_k^\phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

beschrieben werden. Der Zustandsvektor $\mathbf{x}_k = [\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \phi_k]^\top$ beschreibt die Position und Orientierung des Roboters auf der Ebene. Der Stellgrößenvektor $\mathbf{u}_k = [s_k^F, s_k^S, \omega_k]^\top$ umfasst die gewünschte Schrittweite in Vorwärts- und Seitwärtsrichtung sowie den Lenkwinkel. Das Systemrauschen wird hier als additives weißes Rauschen $\mathbf{w}_k = [\mathbf{w}_k^x, \mathbf{w}_k^y, \mathbf{w}_k^\phi]^\top$ modelliert. Das Modell (A.1) beschreibt eine Bewegungsabfolge, bei der zunächst der Vorwärtsschritt und dann die Drehung ausgeführt wird. Wird diese Reihenfolge vertauscht, d. h. erst die Drehung und dann der Vorwärtsschritt ausgeführt, dann führt dies zum kinematischen Modell

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \phi_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \\ \phi_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_k + \omega_k) & -\sin(\phi_k + \omega_k) & 0 \\ \sin(\phi_k + \omega_k) & \cos(\phi_k + \omega_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k^F \\ s_k^S \\ \omega_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k^x \\ \mathbf{w}_k^y \\ \mathbf{w}_k^\phi \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Durch eine Beschränkung des Stellgrößenvektors können weitere relevante Bewegungsmodelle realisiert werden. Für $s_k^S = 0$, also ohne Seitwärtsbewegung, entspricht das sich ergebende nichtlineare kinematische Modell dem eines Roboters mit Differentialantrieb. Für $\omega_k = 0$, also ohne Rotation, ergibt sich ein sehr einfaches omnidirektionales lineares Bewegungsmodell.

Durch die implizite Schrittdiskretisierung ist der Roboter besonders geeignet, um die weit verbreiteten und in dieser Arbeit betrachteten (zeit-)diskreten Schätz- und Regelungsalgorithmen anzuwenden, da eine künstliche Diskretisierung hier nicht mehr notwendig ist. Darüber hinaus besteht auch die Möglichkeit, das kinematische Modell des Roboters nach Bedarf durch eine wie im letzten Absatz beschriebene Stellgrößenbeschränkung zu „programmieren“, weshalb er besonders vielseitig zum Test unterschiedlicher Algorithmen eingesetzt werden kann.

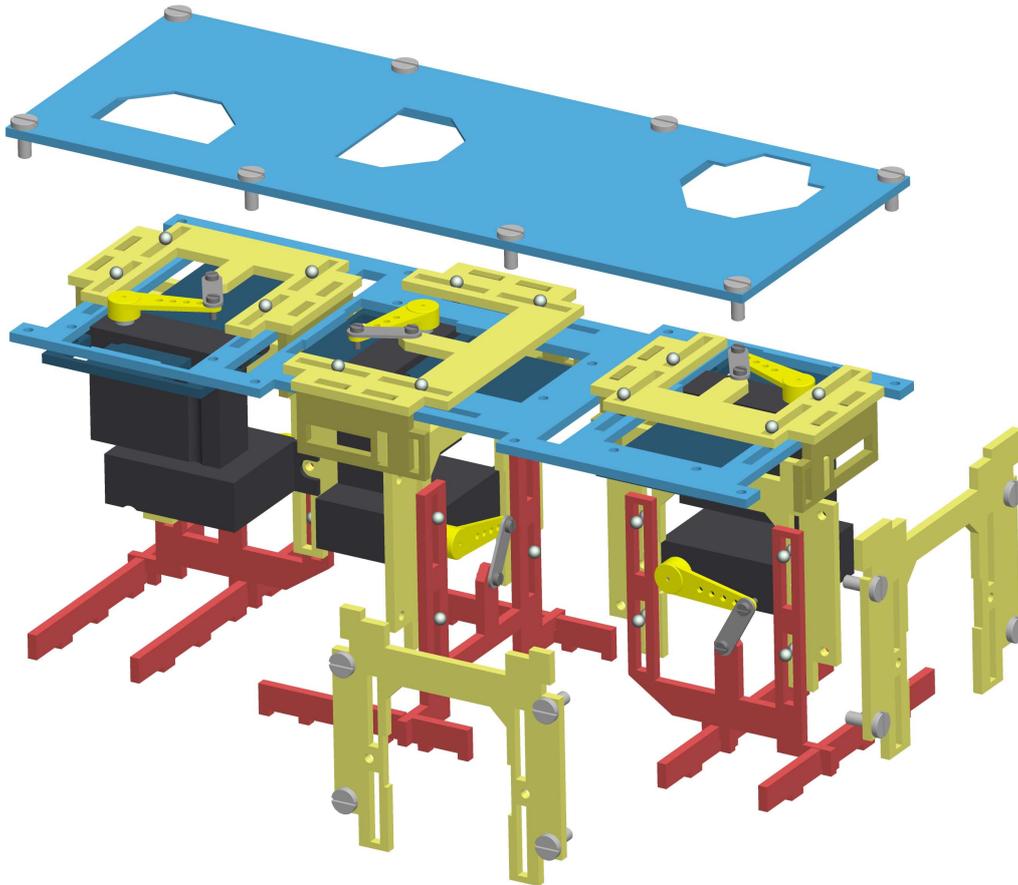


Abbildung A.5: CAD-Modell des Roboters in Explosionsansicht. Die obere Platte des Rumpfes sowie eine Seitenplatte des vorderen und mittleren Beins sind explodiert dargestellt, sodass die Linearkugellager mit jeweils 2×4 Kugeln (grau) deutlich sichtbar sind.

A.3 Technische Realisierung

Der Roboter hat eine Gesamtlänge von 125 mm, eine Breite von 48 mm und eine Höhe zwischen 48 mm und 68 mm, abhängig von der Stellung der Füße. Alle sechs Freiheitsgrade verfügen über einen Bewegungsbereich von jeweils 20 mm.

Die sechs Lineargelenke des Roboters sind in einer Sandwich-Bauweise ausgeführt (Abb. A.5). Zwischen zwei auf Abstand verschraubten Platten (z. B. den beiden in Abb. A.5 blau dargestellten Platten des Rumpfes) läuft, durch Linear-Kugellager geführt, eine mittlere Platte (z. B. die gelbe Platte zwischen den blauen Rumpflplatten). Pro Lineargelenk werden je Seite vier Kugeln in separaten Lagerbetten als Lager verwendet, wobei es sich bei den Lagerbetten um Ausschnitte in den Platten handelt. Jeweils die mittleren Platten werden mit Miniaturservos (schwarz mit gelbem Servoarm) angetrieben.

Die mechanische Struktur des Roboters besteht aus 1,5 mm starken kupferbeschichteten glasfaserverstärkten Epoxidharzplatten, welche auch in der Leiterplattenherstellung verwendet werden. Neben der sehr hohen Festigkeit und dem niedrigen Gewicht des Materials kann es sehr effizient mit einem CNC-Fräsbearbeitungsplotter, welcher auch zur Leiterplattenherstellung eingesetzt

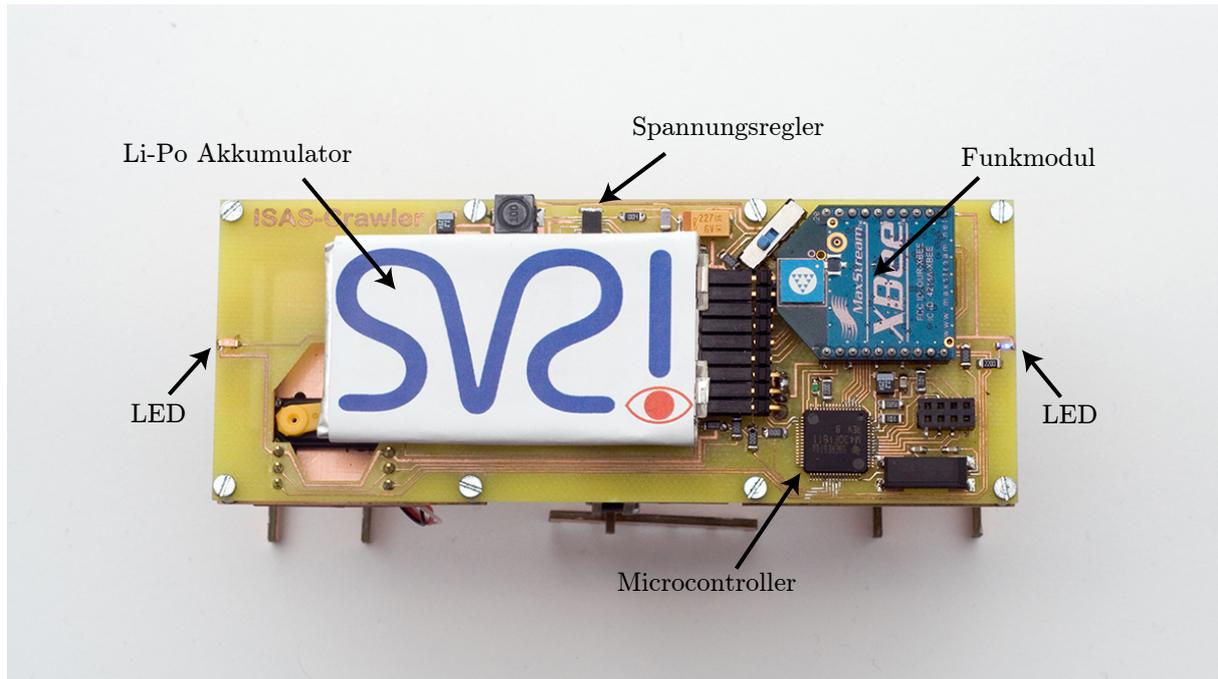


Abbildung A.6: Draufsicht des Roboters.

wird, bearbeitet werden. Die Verwendung von kupferbeschichteten Material erlaubt die direkte Integration der Elektronik auf der mechanischen Struktur (Abb. A.6). Somit kann ein sehr hoher Integrationsgrad realisiert werden.

Der Roboter verfügt über einen 16-Bit MSP430F1611 Mikrocontroller von Texas Instruments mit einer Taktfrequenz von 8 MHz und 10 KB RAM sowie 48 KB Flash-Speicher, welcher unter anderem zur grundlegenden Funktionssteuerung des Roboters verwendet wird. Zur Funkkommunikation wird ein XBee-Funkmodul der Firma MaxStream eingesetzt (ZigBee/IEEE 802.15.4 im 2,4 GHz-Band). Die Spannungsversorgung erfolgt mit einem 720 mAh, 3,7 V Lithium-Polymer-Akkumulator, wobei zur Versorgung der Servos ein Spannungsregler eingesetzt wird, um die Spannung auf 7 V anzuheben. Ferner verfügt der Roboter über Leuchtdioden, welche zur kameragestützten Positionserkennung des Roboters genutzt werden.

A.4 Testumgebung

Um Experimente mit den miniaturisierten Laufrobotern durchführen zu können, sind diese in eine Testumgebung integriert, welche in [3, 8] beschrieben wird. Die Testumgebung verfügt über eine modulare Struktur (Abb. A.7), sodass einzelne Komponenten einfach ausgetauscht werden könne. Die Programm-Module der Testumgebung sind abgesehen von der Software des Roboters in MathWorks MATLAB implementiert, was die schnelle und einfache Implementierung und Modifikation einzelner, auch mathematisch anspruchsvoller, Komponenten gestattet.

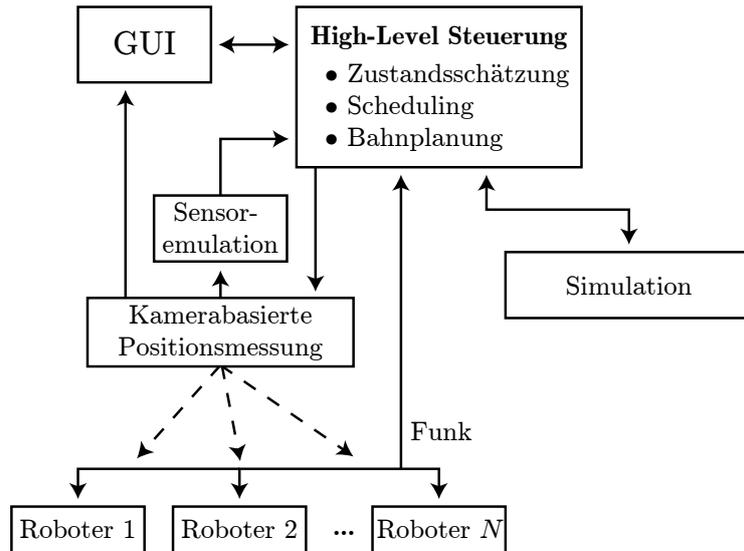


Abbildung A.7: Systemübersicht der Roboter-Testumgebung

A.4.1 Kamerabasierte Positionsmessung und Sensoremulation

Die Position und Orientierung der Roboter wird mittels einer CCD-Deckenkamera auf Basis zweier Leuchtdioden am Front und Heck der Roboter bestimmt. Die verwendete Kamera hat eine Auflösung von 1024×768 Pixeln und deckt eine Fläche von $2,6 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$ ab (Abb. A.8). Mit dem verwendeten System kann eine Messgenauigkeit von unter 1 cm erreicht werden.

Die so gemessene Position und Orientierung der Roboter wird auf zweifache Weise genutzt. Zum einen können im Rahmen einer Sensoremulation Messwerte für verschiedene Sensortypen emuliert werden. Hierbei kann es sich z. B. um Abstandsmessungen, wie sie bei einer Ultraschall-Abstandsmessung entstehen, handeln, wobei sehr einfach unterschiedliche Rauscheinflüsse realisiert werden können. Somit kann leicht der Einfluss verschiedener Sensoren auf die verwendeten High-Level-Algorithmen evaluiert werden. Zum anderen werden die gemessenen Positionsdaten als „wahre“ Daten zur Bewertung der verwendeten High-Level-Algorithmen sowie zur Visualisierung in der grafischen Benutzerschnittstelle verwendet.

A.4.2 High-Level Steuerung

Die High-Level Steuerung umfasst Submodule zur Zustandsschätzung, zur Sensoreinsatzplanung sowie zur Bahnplanung und wird auf einem zentralen Rechner ausgeführt. Somit können sowohl zentrale als auch dezentrale Verfahren einfach implementiert und ausgetauscht werden.

Im Submodul zur Zustandsschätzung wird basierend auf emulierten Messdaten, wie z. B. Abstandsmessungen zwischen Robotern, eine Schätzung der Position und Orientierung der Roboter durchgeführt. Hierzu stehen verschiedene alternative nichtlineare Filterverfahren zur Verfügung.

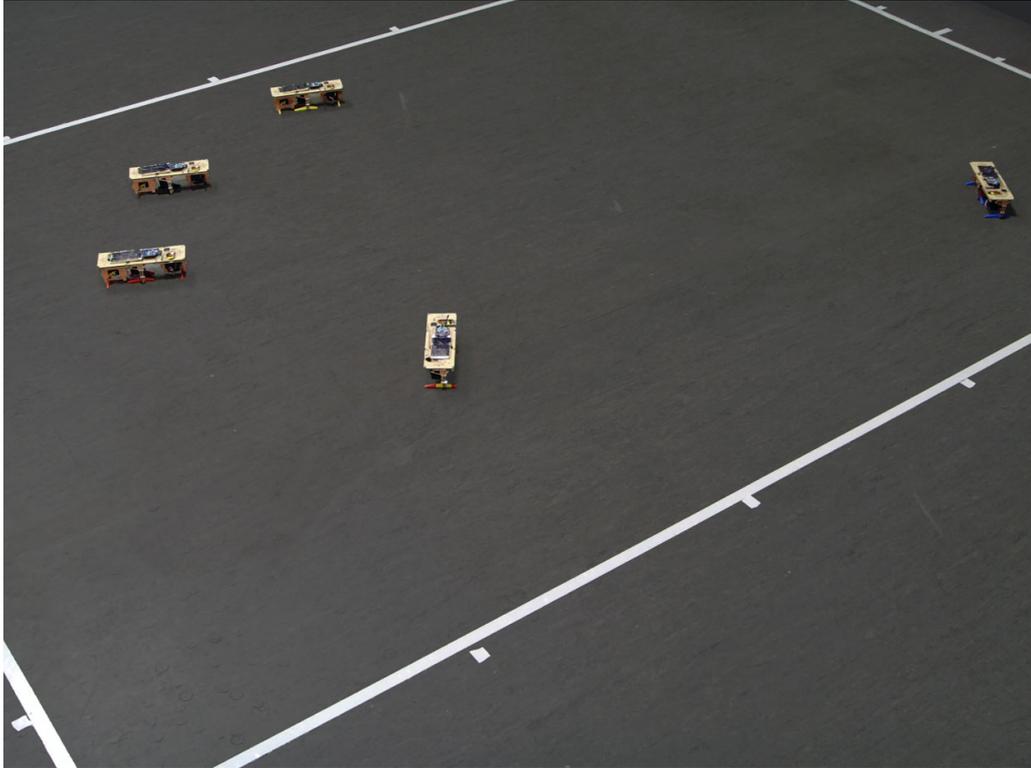


Abbildung A.8: Roboter in der Testumgebung.

Im Scheduling-Submodul wird eine Sensoreinsatzplanung durchgeführt. Hierzu stehen wiederum verschiedene Verfahren zur Verfügung, wobei das Verfahren, welches auch in den Experimenten in 7.1.2 eingesetzt wird, in Anhang B näher beschrieben wird.

Im Bahnplanungs-Submodul werden auf Basis der geschätzten Zustandsinformationen Stellwerte für die Roboter berechnet. Hierzu stehen neben den in dieser Arbeit vorgestellten SNMPC-Verfahren auch klassische Bahnplanungsverfahren zur Verfügung.

A.4.3 Simulations-Engine

Neben Experimenten mit realen Robotern können alle Aspekte der Testumgebung auch mittels einer ereignisgesteuerten Simulations-Engine simuliert werden.

A.4.4 Grafische Benutzerschnittstelle (GUI)

Sowohl Experimente mit den realen Robotern als auch Simulationen können mittels einer grafischen Benutzerschnittstelle gesteuert und überwacht werden. Ebenso können hier wahre sowie geschätzte Position und Ausrichtung der Roboter sowie weitere Aspekte der High-Level-Steuerung dargestellt werden.

Sensoreinsatzplanung

Im Folgenden wird ein einfaches heuristisches Verfahren zur Planung von Abstandsmessungen vorgestellt, welches auch in [8] beschrieben wird. Dieses Verfahren, welches auch zur Sensoreinsatzplanung bei der Lokalisierung von Robotergruppen eingesetzt werden kann, findet in den Experimenten, welche in Abschnitt 7.1.2 beschrieben werden, Anwendung.

Werden N Roboter eingesetzt, dann ergeben sich $\frac{1}{2} \cdot N \cdot (N - 1)$ mögliche Paarungen, zwischen denen eine Abstandsmessung durchgeführt werden kann. Da zwischen Messungen eine recht gute Positionsschätzung mittels Koppelnavigation auf Basis von Odometriedaten erfolgen kann, ist es wünschenswert, die Anzahl an Messungen gering zu halten, um in realitätsnahen Szenarien den Bedarf an Energie und Rechenleistung zu reduzieren. Dies kann mittels Verfahren zur Sensoreinsatzplanung geschehen, wobei im Folgenden eine zweischrittige Planungsstrategie vorgestellt wird. Diese umfasst die Schritte:

1. Robotervorauswahl,
2. Auswahl eines Landmarkenroboters.

Bei der Robotervorauswahl werden diejenigen Roboter bestimmt, deren Positionsschätzung am unsichersten ist. Darauf werden im zweiten Schritt geeignete Messpartner als Landmarken bestimmt, so dass eine möglichst starke Reduktion der Unsicherheiten in den Positionsschätzungen der vorausgewählten Roboter resultiert. Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Darstellung der Fall beschrieben, dass ein Roboter eine Messung zu einem Landmarkenroboter durchführt. Die Erweiterung auf mehrere Roboter bzw. mehrere Landmarkenroboter ist ohne Einschränkung direkt möglich.

Da lediglich Abstandsmessungen vorgenommen werden, wird bei dem im Folgenden vorgestellten Algorithmus lediglich der Positionsanteil des Zustandsvektors berücksichtigt. Insbesondere wird hier das erste Moment $\tilde{\underline{x}}_k = E\{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k\}^T$ sowie das zweite zentrale Moment (Kovarianz) $\tilde{\mathbf{C}}_k$ des Zustands eines Roboters in diesem Subraum betrachtet.

B.1 Robotervorauswahl

Bei der Robotervorauswahl wird zum einen bestimmt, ob eine Messung stattfinden soll, d. h. nötig ist, und wenn ja, für welchen Roboter dies der Fall ist. Entweder kann eine Messung eingeleitet werden, wenn für einen Roboter eine bestimmte oberer Schranke der Unsicherheit überschritten wird, oder es besteht die Möglichkeit, nach einem bestimmten festen Zeitintervall eine Messung einzuleiten. In beiden Fällen muss jeweils der Roboter identifiziert werden, für den eine Messung besonders notwendig bzw. gewinnbringend ist. Als Maß hierfür kann das zweite zentrale Moment der Positionsschätzung eines Roboters i , also $\tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)}$ verwendet werden, welche ein Maß für die Positionsunsicherheit des Roboters darstellt. Der Roboter, für den die Messung durchgeführt werden soll, kann dann mit

$$\arg \max_i \left\{ \psi(\tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)}) \right\}$$

bestimmt werden, wobei $\psi(\cdot)$ eine Funktion ist, welche $\tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)}$ auf einen Skalar abbildet, welcher die Unsicherheit der Kovarianzmatrix quantifiziert. Eine sinnvolle Wahl für $\psi(\cdot)$ ist z. B. die Spur oder die Determinante. In den Experimenten in Abschnitt 7.2 wird die Spur verwendet, welche proportional zum Umfang der Kovarianzellipse ist.

B.2 Auswahl eines Landmarkenroboters

Werden Abstandsmessungen durchgeführt, kann eine besonders starke Reduktion der Unsicherheit erreicht werden, wenn die Abstandsmessung vom vorausgewählten Roboter i zu einer besonders geeigneten Landmarke durchgeführt wird. Um die Eignung einer Landmarke j zu quantifizieren, kann die *Mahalanobis-Distanz* [ZSR02]

$$M(\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)}) = (\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)})^\top \left(\tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)} \right)^{-1} (\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)})$$

verwendet werden, wobei hier davon ausgegangen wird, dass die Position $\tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)}$ der Landmarke sicher bekannt ist. Durch eine Minimierung der Mahalanobis-Distanz werden Landmarken entlang der längsten Achse der Kovarianzellipse des Roboters favorisiert.

In dem hier betrachteten Fall führen zwei Aspekte dazu, dass die Mahalanobis-Distanz nicht direkt verwendet werden kann:

- i) Bei einer Abstandsmessung ist die Messgenauigkeit typischerweise nicht abstandsabhängig.
- ii) Andere Roboter werden als Landmarken verwendet. Somit handelt es sich bei der Position der Landmarken lediglich um eine unsicherheitsbehaftete Schätzung.

Um dies zu umgehen, kann die *normalisierte beidseitige Mahalanobis-Distanz*¹

$$M^*(\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)}, \tilde{\mathbf{C}}_k^{(j)}) = \frac{(\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)})^\top (\tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)})^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_k^{(j)} (\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)})}{(\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)})^\top (\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)} - \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)})} \quad (\text{B.1})$$

verwendet werden, welche die folgenden wichtigen Vorteile bietet:

- i) $M^*(\tilde{\mathbf{x}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{C}}_k^{(i)}, \tilde{\mathbf{x}}_k^{(j)}, \tilde{\mathbf{C}}_k^{(j)})$ ist durch den Nenner in (B.1) normalisiert und somit abstands-invariant.
- ii) Da die Unsicherheit des Landmarkenroboters $\tilde{\mathbf{C}}_k^{(j)}$ in der Berechnung berücksichtigt wird, werden lediglich Landmarken mit einer hohen Positionssicherheit in Richtung des Roboters i verwendet.

Durch die Kombination der beiden Schritte kann eine effiziente Sensoreinsatzplanung für Abstandsmessungen durchgeführt werden, bei der zum einen sichergestellt ist, dass die Messung zu einem Roboter mit einer besonders unsicheren Positionsschätzung erfolgt, hier also eine Messung besonders notwendig ist, und zum anderen der Messpartner ein hohes Maß an Informationsgewinn ermöglicht.

¹ engl.: normalized mutual Mahalanobis distance

Berechnung stückweise polynomieller Gütefunktionen

Im Folgenden finden sich die Berechnungsvorschriften für stückweise definierte erwartungswertbasierte polynomielle Gütefunktionen bis fünfter Ordnung bei Gauß'schen Zufallsvariablen. Zur erhöhten Übersichtlichkeit sind nur Monome angegeben und lediglich die unteren Integrationsgrenzen x_{min} sind endlich. Der allgemeine Fall ergibt sich direkt durch Linearkombination. Die Erweiterung auf höhere Dimensionen ist in Abschnitt 4.2.2 beschrieben.

$$\int_{x_{min}}^{\infty} \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) dx = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu - x_{min}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right)$$

$$\int_{x_{min}}^{\infty} x \cdot \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) dx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x_{min})^2}{2\sigma^2}} + \frac{\mu}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu - x_{min}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right)$$

$$\int_{x_{min}}^{\infty} x^2 \cdot \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) dx = \frac{\sigma(\mu + x_{min})}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x_{min})^2}{2\sigma^2}} + \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu - x_{min}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right)$$

$$\int_{x_{min}}^{\infty} x^3 \cdot \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) dx = \frac{\sigma(\mu^2 + 2\sigma^2 + \mu x_{min} + x_{min}^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x_{min})^2}{2\sigma^2}} + \frac{\mu(\mu^2 + 3\sigma^2)}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu - x_{min}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{min}}^{\infty} x^4 \cdot \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) dx \\ = \frac{\sigma(\mu^3 + \mu^2 x_{min} + 3\sigma^2 x_{min} + x_{min}^3 + 5\mu\sigma^2 + \mu x_{min}^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x_{min})^2}{2\sigma^2}} + \frac{\mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu - x_{min}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{min}}^{\infty} x^5 \cdot \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) dx \\ = \frac{\sigma(x_{min}^4 + x_{min}^3\mu + x_{min}^2(\mu^2 + 4\sigma^2) + x_{min}(\mu^3 + 7\mu\sigma^2) + \mu^4 + 9\mu^2\sigma^2 + 8\sigma^4)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x_{min})^2}{2\sigma^2}} \\ + \frac{\mu(\mu^4 + 10\mu^2\sigma^2 + 15\sigma^4)}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\mu - x_{min}}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) \end{aligned}$$

Erwartungswert einer gaußverteilten Zufallsvariable transformiert mit sinc

In diesem Kapitel wird eine analytische Lösung für die Erwartungswertberechnung einer gaußverteilten Zufallsvariable \mathbf{x} mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \mathcal{N}(x - \mu; \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right),$$

welche mit einer sinc-Funktion (5.8) transformiert wird, beschrieben. Diese Herleitung ist analog zu [4].

Für den Erwartungswert einer Zufallsvariable, welche mit einer Funktion $g(x)$ transformiert wird gilt hier

$$E_{\mathbf{x}}\{g(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x) dx .$$

Dies kann mittels des Parseval'schen Theorems ([AW05] p. 953)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g^*(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \cdot G^*(f) df$$

berechnet werden, wobei $(\cdot)^*$ die komplexe Konjugation bezeichnet und $F(f)$ sowie $G(f)$ die Fouriertransformierten von $f(x)$ bzw. $g(x)$ sind. Für diese gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$\circ$$

$$\bullet$$

$$F(f) = e^{-2\pi^2\sigma^2 f^2} \cdot e^{-j2\pi f\mu} ,$$

([Bra99]), wobei $j = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit ist, und

$$g(x) = \text{sinc}(x/\alpha)$$

$$\circ$$

$$\bullet$$

$$G(f) = \alpha \cdot \text{rect}_{1/\alpha}(f) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |f| \leq \frac{1}{2\alpha} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\text{rect}_{1/\alpha}(\cdot)$ die Rechteckfunktion der Breite $1/\alpha$ ist. Da $g(x)$ und $G(f)$ keinen imaginären Anteil haben gilt $g^*(x) = g(x)$ sowie $G^*(f) = G(f)$. Somit ergibt sich für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{x}}\{g(\mathbf{x})\} &= \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \cdot G(f) df \\ &= \alpha \int_{-\frac{1}{2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \exp\{-2(\pi\sigma f)^2 - j2\pi f\mu\} df \end{aligned}$$

Durch quadratische Ergänzung mit $(\frac{j\mu}{2\sigma})^2$ folgt dann

$$E_{\mathbf{x}}\{g(\mathbf{x})\} = \alpha \int_{-\frac{1}{2\alpha}}^{\frac{1}{2\alpha}} \exp\left\{-2\left(\left(\pi\sigma f + j\frac{\mu}{2\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{2\sigma}\right)^2\right)\right\} df .$$

Substitution mit

$$z = \sqrt{2}\pi\sigma f + j\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} \qquad dz = \sqrt{2}\pi\sigma df$$

führt zu

$$E_{\mathbf{x}}\{g(\mathbf{x})\} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}\pi\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot \int_{-\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\alpha} + j\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}}^{\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\alpha} + j\frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}} e^{-z^2} dz . \quad (*)$$

Um dieses Integral zu lösen, wobei es sich um ein Integral von e^{-z^2} mit komplexwertigen symmetrischen Grenzen $-a + jb$ und $a + jb$ handelt, wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma D.1

Für das Integral von e^{-z^2} mit komplexwertigen symmetrischen Grenzen $-a + jb$ und $a + jb$ gilt

$$\int_{-a+jb}^{a+jb} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \cdot \text{Re}\{\text{erf}(a + jb)\} ,$$

wobei $\text{Re}\{\cdot\}$ den Realteil einer komplexen Zahl und $\text{erf}(\cdot)$ die Gauß'sche Fehlerfunktion bezeichnet.

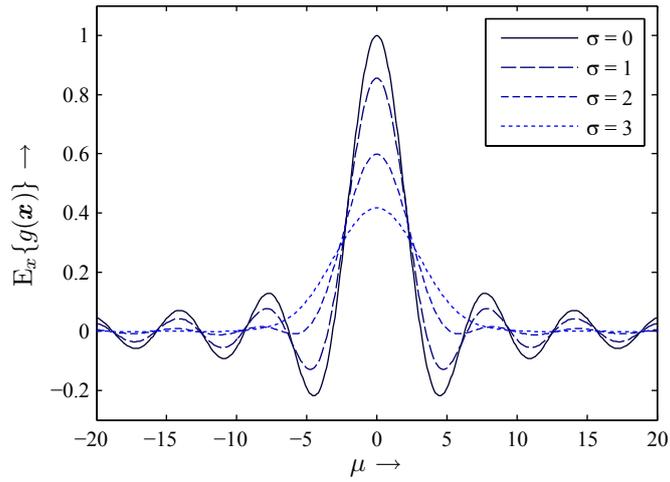


Abbildung D.1: Erwartungswert einer sinc-transformierten gaußverteilten Zufallsvariable für verschiedene μ und σ mit $\alpha = \pi$.

BEWEIS.

$$\int_{-a+jb}^{a+jb} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\operatorname{erf}(a + jb) - \operatorname{erf}(-a + jb) \right).$$

Mit den Symmetrieeigenschaften $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$ (ungerade) und $\operatorname{erf}(z^*) = \operatorname{erf}^*(z)$ [AS72] ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{-a+jb}^{a+jb} e^{-z^2} dz &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\operatorname{erf}(a + jb) + \operatorname{erf}(a - jb) \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\underbrace{\operatorname{erf}(a + jb) + \operatorname{erf}^*(a + jb)}_{=: c+jd} \right), \end{aligned}$$

Substitution von $c + jd := \operatorname{erf}(a + jb)$ führt zum Ergebnis

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left((c + jd) + (c - jd) \right) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot c \\ &= \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{Re} \{ \operatorname{erf}(a + jb) \}. \end{aligned}$$

□

Durch Einsetzen von Lemma D.1 in (*) folgt

$$E_{\mathbf{x}}\{g(\mathbf{x})\} = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\pi\sigma}{\sqrt{2}\alpha} + j \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right\}.$$

In Abb. D.1 ist die sich ergebende Funktion für verschiedene μ und σ dargestellt. Für kleine σ nähert sich die Funktion einer sinc-Funktion, für große σ einer Gaußdichte. Dies ist erwartungsgemäß, da sich die Gaußdichte für kleine σ einer Diracdistribution nähert und sich somit das Integral, gemäß der Ausblendeigenschaft der Diracdistribution, einer sinc-Funktion nähert. Für große σ ergibt sich der umgekehrte Effekt. Hier nähert sich die sinc-Funktion einer Diracdistribution, sodass sich das Integral der Gaußdichte nähert.

Bemerkung D.1 Der Realteil der komplexen Fehlerfunktion kann effizient mit den Näherungen (7.1.23) und (7.1.29) aus [AS72] approximiert werden. Indem der Gaußanteil $\exp\{-\mu^2/(2\sigma^2)\}$ direkt in der Approximation berücksichtigt wird, kann die numerische Stabilität deutlich erhöht werden. Würde dies nicht geschehen, würden große Imaginärteile $\mu/(\sqrt{2}\sigma)$ des Arguments der komplexen Fehlerfunktion zu sehr großen Werten der komplexen Fehlerfunktion führen.

Literaturverzeichnis

- [AMGC02] ARULAMPALAM, M. SANJEEV, SIMON MASKELL, NEIL GORDON und TIM CLAPP: *A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking*. IEEE Transactions on Signal Processing, 50(2):174–188, Februar 2002.
- [AS72] ABRAMOWITZ, MILTON und IRENE A. STEGUN (Herausgeber): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 10th Auflage, Dezember 1972.
- [AW05] ARFKEN, GEORGE und HAND J. WEBER: *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic Press, 6th Auflage, 2005.
- [Bel57] BELLMAN, RICHARD E.: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, U.S.A., 1957.
- [Ber00] BERTSEKAS, DIMITRI P.: *Dynamic Programming and Optimal Control*, Band 1. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, U.S.A., 2 Auflage, 2000.
- [BH06] BEUTLER, FREDERIK und UWE D. HANEBECK: *The Probabilistic Instantaneous Matching Algorithm*. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2006)*, Seiten 311–316, Heidelberg, Germany, September 2006.
- [Bla06] BLACKMORE, LARS: *A Probabilistic Particle Control Approach to Optimal, Robust Predictive Control*. In: *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference 2006*, 2006.
- [BLW06] BLACKMORE, LARS, HUI LI und BRIAN WILLIAMS: *A Probabilistic Approach to Optimal Robust Path Planning with Obstacles*. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference (ACC 2006)*, Seiten 2831 – 2837, 2006.
- [BMWDW05] BROOKS, ALEX, ALEXEI MAKARENKO, STEFAN WILLIAMS und HUGH DURRANT-WHYTE: *Planning in Continuous State Spaces with Parametric POMDPs*. In: *IJCAI Workshop Reasoning with Uncertainty in Robotics*, Juli 2005.

- [BMWDW06] BROOKS, ALEX, ALEXEI MAKARENKO, STEFAN WILLIAMS und HUGH DURRANT-WHYTE: *Parametric POMDPs for Planning in Continuous State Spaces*. Robotics and Autonomous Systems, 54(11):887–897, 2006.
- [Boo81] BOOS, DENNIS D.: *Minimum Distance Estimators for Location and Goodness of Fit*. Journal of the American Statistical association, 76(375):663–670, 1981.
- [Bra99] BRACEWELL, RONALD N.: *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill, 3rd Auflage, 1999.
- [BTK04] BACK, MICHAEL, STEPHAN TERWEN und VOLKER KREBS: *Predictive Powertrain Control for Hybrid Electric Vehicles*. In: *Proceedings of IFAC Symposium in Advances in Automotive Control*, Seiten 451–457, Salerno, Italien, 2004.
- [BW07] BLACKMORE, LARS und BRIAN C. WILLIAMS: *Optimal, Robust Predictive Control of Nonlinear Systems under Probabilistic Uncertainty using Particles*. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference (ACC 2007)*, Seiten 1759 – 1761, 2007.
- [CFM07] CANALE, MASSIMO, , LORENZO FAGIANO und MARIO MILANESE: *Power Kites for Wind Energy Generation*. Control Systems Magazine, IEEE, 27(6):25–38, Dezember 2007.
- [CMCFM07] CHANG, HYEONG SOO, JIAQIAO HU MICHAEL C. FU und STEVEN I. MARCUS: *An Asymptotically Efficient Simulation-Based Algorithm for Finite Horizon Stochastic Dynamic Programming*. IEEE Transactions on Automatic Control, 52:89 – 94, Januar 2007.
- [CMPS06] CHHETRI, AMIT S., DARRYL MORRELL und ANTONIA PAPANDREOU-SUPPAPPOLA: *Nonmyopic Sensor Scheduling and its Efficient Implementation for Target Tracking Applications*. EURASIP Journal on Applied Signal Processing, to appear, 2006.
- [dF02] FREITAS, NANDO DE: *Rao-Blackwellised Particle Filtering for Fault Diagnosis*. In: *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, Band 4, Seiten 1767–1772, 2002.
- [DFS⁺02] DIEHL, MORITZ, ROLF FINDEISEN, STEFAN SCHWARZKOPF, ILKNUR USLU, FRANK ALLGÖWER, HANS GEORG BOCK, ERNST D. GILLES und JOHANNES P. SCHLÖDER: *An Efficient Algorithm for Nonlinear Model Predictive Control of Large-Scale Systems. Part I: Description of the Method*. Automatisierungstechnik, 50(12):557–567, 2002.
- [DFS⁺03] DIEHL, MORITZ, ROLF FINDEISEN, STEFAN SCHWARZKOPF, ILKNUR USLU, FRANK ALLGÖWER, HANS GEORG BOCK, ERNST D. GILLES und JOHANNES P. SCHLÖDER: *An Efficient Algorithm for Nonlinear Model Predictive Control of Large-Scale Systems. Part II: Application to a Distillation Column*. Automatisierungstechnik, 51(1):22–29, 2003.

-
- [Dij59] DIJKSTRA, EDSGER WYBE: *A Note on Two Problems in Connexion with Graphs*. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [DPR08] DEISENROTH, MARC P., JAN PETERS und CARL E. RASMUSSEN: *Approximate Dynamic Programming with Gaussian Processes*. In: *Proceedings of the 2008 American Control Conference (ACC 2008)*, Seattle, Washington, Juni 2008.
- [DUF⁺01] DIEHL, MORITZ, ILKNUR USLU, ROLF FINDEISEN, STEFAN SCHWARZKOPF, FRANK ALLGÖWER, HANS GEORG BOCK, TOBIAS BÜRNER, ERNST D. GILLES, ACHIM KIENLE, JOHANNES P. SCHLÖDER und ERIK STEIN: *Real-Time Optimization for Large Scale Processes: Nonlinear Model Predictive Control of a High Purity Distillation Column*. In: GRÖTSCHHEL, M., S. O. KRUMKE und J. RAMBAU (Herausgeber): *Online Optimization of Large Scale Systems: State of the Art*, Seiten 363–384. Springer, 2001.
- [Dyn65] DYNKIN, EUGENE B.: *Controlled Random Sequences*. *Theory of Probability and its Applications*, 10(1):1–14, 1965.
- [FA02] FINDEISEN, ROLF und FRANK ALLGÖWER: *An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control*. In: SCHERER, C.W. und J.M. SCHUMACHER (Herausgeber): *Summerschool on The Impact of Optimization in Control, Dutch Institute of Systems and Control (DISC)*, Seiten 3.1–3.45, 2002.
- [FDN⁺01] FINDEISEN, ROLF, MORITZ DIEHL, ZOLTAN NAGY, FRANK ALLGÖWER, HANS GEORG BOCK und JOHANNES P. SCHLÖDER: *Computational Feasibility And Performance Of Nonlinear Model Predictive Control Schemes*. In: *proceedings of European Control Conference, ECC*, 2001.
- [FS07] FOSS, BJARNE A. und TOR S. SCHEI: *Putting Nonlinear Model Predictive Control into Use*. In: FINDEISEN, ROLF, FRANK ALLGÖWER und LORENZ T. BIEGLER (Herausgeber): *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, Band 358/2007 der Reihe *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Seiten 407–417. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [Han02] HANEBECK, UWE D.: *Nonlinear Methods for State Estimation in Stochastic Dynamic Systems — A Concise Introduction*. Habilitationsschrift, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Technische Universität München, Referent: G. Schmidt, Korreferent: V. Krebs, September 2002.
- [HBH06] HUBER, MARCO, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Closed-Form Prediction of Nonlinear Dynamic Systems by Means of Gaussian Mixture Approximation of the Transition Density*. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2006)*, Seiten 98–103, Heidelberg, Germany, September 2006.
- [HBH07] HUBER, MARCO F., DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Efficient Nonlinear Measurement Updating based on Gaussian Mixture Approximation of*
-

- Conditional Densities*. In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference (ACC 2007)*, Seiten 4425–4430, New York, New York, Juli 2007.
- [HH07a] HUBER, MARCO F. und UWE D. HANEBECK: *Hybrid Transition Density Approximation for Efficient Recursive Prediction of Nonlinear Dynamic Systems*. In: *International Conference on Information Processing in Sensor Networks (IPSN 2007)*, Seiten 283–292, Cambridge, Massachusetts, USA, April 2007.
- [HH07b] HUBER, MARCO F. und UWE D. HANEBECK: *The Hybrid Density Filter for Nonlinear Estimation based on Hybrid Conditional Density Approximation*. In: *10th International Conference on Information Fusion (Fusion 2007)*, Quebec, Canada, Juli 2007.
- [HH08] HUBER, MARCO F. und UWE D. HANEBECK: *Gaussian Filter based on Deterministic Sampling for High Quality Nonlinear Estimation*. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress (IFAC 2008)*, Seoul, Korea, Juli 2008.
- [How60] HOWARD, RONALD A.: *Dynamic Programming and Markov Processes*. Technology Press-Wiley, Cambridge, Massachusetts, 1960.
- [HS07] HANEBECK, UWE D. und OLIVER C. SCHREMPF: *Greedy Algorithms for Dirac Mixture Approximation of Arbitrary Probability Density Functions*. In: *Proceedings of the 2007 IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2007)*, Seiten 3065–3071, New Orleans, Louisiana, Dezember 2007.
- [JSS⁺93] JOHNSON, SHARON A., JERY R. STEDINGER, CHRISTINE A. SHOEMAKER, YING LI und JOSE ALBERTO TEJADA-GUIBERT: *Numerical Solution of Continuous-State Dynamic Programs Using Linear and Spline Interpolation*. *Operations Research*, 41(3):484–500, Mai – Juni 1993.
- [JU04] JULIER, SIMON J. und JEFFREY K. UHLMANN: *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*. *Proceedings of the IEEE*, 92(3):401–422, März 2004.
- [Kal60] KALMAN, RUDOLF E.: *A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*. *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, 82(D):35–45, März 1960.
- [Kap05a] KAPPEN, HILBERT J.: *Linear theory for control of nonlinear stochastic systems*. *Physical Review Letters*, 95(20):200201.1– 200201.4, November 2005.
- [Kap05b] KAPPEN, HILBERT J.: *Path integrals and symmetry breaking for optimal control theory*. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiments*, 2005(11):P11011, November 2005.
- [KH08] KLUMPP, VESA und UWE D. HANEBECK: *Dirac Mixture Trees for Fast Suboptimal Multi-Dimensional Density Approximation*. In: *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2008)*, Seoul, Republic of Korea, August 2008.

- [KLC98] KAEHLING, LESLIE PACK, MICHAEL L. LITTMAN und ANTHONY R. CASSANDRA: *Planning and Acting in Partially Observable Stochastic Domains*. Artificial Intelligence, 101(1-2):99–134, 1998.
- [KMSRG04] KOCIJAN, JUŠ, RODERICK MURRAY-SMITH, CARL EDWARD RASMUSSEN und AGATHE GIRARD: *Gaussian Process Model Based Predictive Control*. In: *Proceeding of the 2004 American Control Conference*, Seiten 2214–2219, Boston, Massachusetts, U.S.A., Juni – Juli 2004.
- [KMSRL03] KOCIJAN, JUŠ, RODERICK MURRAY-SMITH, CARL E. RASMUSSEN und BOJAN LIKAR: *Predictive control with Gaussian process models*. In: *Proceedings of IEEE Region 8 Eurocon 2003: Computer as a Tool*, Seiten 352–356, Piscataway, NJ, U.S.A., 2003.
- [Lan08] LANGDON, MARK: *Flying High: Another kind of Wind Power*. Engineering and Technology, 3(3):14–15, 2008.
- [LBS02] LEFEBVRE, TINE, HERMAN BRUYNINCKX und JORIS DE SCHUTTER: *Comments on “A New Method for the Nonlinear Transformation of Means and Covariances in Filters and Estimators”*. IEEE Transactions on Automatic Control, 45(8):1406–1408, 2002.
- [LR94] LEE, JAY H. und N. LAWRENCE RICKER: *Extended Kalman Filter Based Nonlinear Model Predictive Control*. Industrial & Engineering Chemistry Research, 33(6):1530–1541, 1994.
- [MHC99] MADANI, OMID, STEVE HANKS und ANNE CONDON: *On the Undecidability of Probabilistic Planning and Infinite Horizon Partially Observable Markov Decision Problems*. In: *Proceedings of the Sixteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, Seiten 541–548, 1999.
- [MKT07] MARECKI, JANUSZ, SVEN KOENIG und MILIND TAMBE: *A Fast Analytical Algorithm for Solving Markov Decision Processes with Real-Valued Resources*. In: *Proceedings of the Twentieth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-07)*, Januar 2007.
- [MS96] MAZ’YA, VLADIMIR und GUNTHER SCHMIDT: *On approximate approximations using Gaussian kernels*. IMA Journal of Numerical Analysis, 16(1):13–29, 1996.
- [MTT06] MARECKI, JANUSZ, ZVI TOPOL und MILIND TAMBE: *A Fast Analytical Algorithm for MDPs with Continuous State Spaces*. In: *Proceedings of the Eight Workshop on Game Theoretic and Decision Theoretic Agents held at the Fifth International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS-06)*, Seiten 2536–2541, Mai 2006.

- [MVL07] MACIEJOWSKI, JAN M., ANDREA LECCHINI VISINTINI und JOHN LYGEROS: *NMPC for complex stochastic systems using a Markov Chain Monte Carlo approach*. In: FINDEISEN, ROLF, FRANK ALLGÖWER und LORENZ T. BIEGLER (Herausgeber): *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, Band 358/2007 der Reihe *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Seiten 269–281. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [NB03] NIKOVSKI, DANIEL und MATTHEW BRAND: *Non-Linear Stochastic Control in Continuous State Spaces by Exact Integration in Bellman's Equations*. In: *Proceedings of the 2003 International Conference on Automated Planning and Scheduling*, Seiten 91–95, Juni 2003.
- [NGT⁺07] NAIDOO, KELVIN, JOHN GUIVER, PAUL TURNER, MIKE KEENAN und MICHAEL HARMSE: *Experiences with Nonlinear MPC in Polymer Manufacturing*. In: FINDEISEN, ROLF, FRANK ALLGÖWER und LORENZ T. BIEGLER (Herausgeber): *Assessment and Future Directions of Nonlinear Model Predictive Control*, Band 358/2007 der Reihe *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Seiten 383–398. Springer Berlin / Heidelberg, 2007.
- [Oht03] OHTSUKA, TOSHIYUKI: *A Continuation/GMRES Method for Fast Computation of Nonlinear Receding Horizon Control*. *Automatica*, 40(4):563–574, 2003.
- [Omi07] OMID, FARHAD: *Weiterentwicklung eines Raupenroboters*. Studienarbeit, Lehrstuhl für Intelligente Sensor-Aktor-Systeme, Universität Karlsruhe (TH), 2007.
- [PGT03] PINEAU, JOELLE, GEOFF GORDON und SEBASTIAN THRUN: *Point-based value iteration: An anytime algorithm for POMDPs*. In: *Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, Seiten 1025–1032, Acapulco, Mexico, August 2003.
- [PK01] PHILBRICK, JR., C. RUSSELL und PETER K. KITANIDIS: *Improved Dynamic Programming Methods for Optimal Control of Lumped-Parameter Stochastic Systems*. *Operations Research*, 49(3):398–412, Mai – Juni 2001.
- [PP02] PAPOULIS, ATHANASIOS und S. UNNIKRIISHNA PILLAI: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 4 Auflage, 2002.
- [PSV05] PORTA, JOSEP M., MATTHIJS T. J. SPAAN und NIKOS A. VLASSIS: *Robot Planning in Partially Observable Continuous Domains*. In: THRUN, SEBASTIAN, GAURAV S. SUKHATME und STEFAN SCHAAL (Herausgeber): *Robotics: Science and Systems I*, Seiten 217–224, Cambridge, Massachusetts, Juni 2005.
- [PT87] PAPADIMITRIOU, CHRISTOS und JOHN N. TSITSIKLIS: *The Complexity of Markov Decision Processes*. *Mathematics of Operations Research*, 12(3):441–450, August 1987.

-
- [PVSP06] PORTA, JOSEP M., NIKOS VLASSIS, MATTHIJS T.J. SPAAN und PASCAL POUPART: *Point-Based Value Iteration for Continuous POMDPs*. The Journal of Machine Learning Research, 7:2329–2367, November 2006.
- [QB97] QIN, S. JOE und THOMAS A. BADGWELL: *An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology*. Chemical Process Control, 93(316):232–256, 1997.
- [QB00] QIN, S. JOE und THOMAS A. BADGWELL: *An Overview of Nonlinear Model Predictive Control Applications*. In: ALLGÖWER, FRANK und ALEX ZHENG (Herausgeber): *Nonlinear Model Predictive Control*, Seiten 369–392. Birkhäuser, 2000.
- [RN03] RUSSELL, STUART J. und PETER NORVIG: *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall, 2. ed., internat. ed. Auflage, 2003.
- [RRD04] RICO-RAMIREZ, VICENTE und URMILA M. DIWEKAR: *Stochastic maximum principle for optimal control under uncertainty*. Computers & Chemical Engineering, 28(12):2845–2849, November 2004.
- [Sal90] SALMOND, D. J.: *Mixture Reduction Algorithms for Target Tracking in Clutter*. In: *SPIE Signal and Data Processing of Small Targets*, 1305, Seiten 434–445, April 1990.
- [SBH06a] SCHREMPF, OLIVER C., DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Density Approximation Based on Dirac Mixtures with Regard to Nonlinear Estimation and Filtering*. In: *IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2006)*, San Diego, USA, Dezember 2006.
- [SBH06b] SCHREMPF, OLIVER C., DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Dirac Mixture Density Approximation Based on Minimization of the Weighted Cramér-von Mises Distance*. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2006)*, Seiten 512–517, Heidelberg, Germany, September 2006.
- [Sch73] SCHWEPPE, FRED C.: *Uncertain Dynamic Systems*. Prentice-Hall, 1973.
- [Sch83] SCHUMAKER, LARRY L.: *On Shape-Preserving Quadratic Spline Interpolation*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 20(4):854–864, August 1983.
- [Sch08] SCHREITER, THOMAS: *Stochastische nichtlineare modell-prädiktive Regelung unter Berücksichtigung von verrauschten Messungen*. Diplomarbeit, Lehrstuhl für Intelligente Sensor-Aktor-Systeme, Universität Karlsruhe (TH), 2008.
- [SH07] SCHREMPF, OLIVER C. und UWE D. HANEBECK: *Recursive Prediction of Stochastic Nonlinear Systems Based on Dirac Mixture Approximations*. In: *Proceedings of the American Control Conference (ACC 2007)*, Seiten 1768 – 1774, New York City, USA, Juli 2007.
-

- [SHH07] SAWO, FELIX, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *Parameter Identification and Reconstruction Based on Hybrid Density Filter for Distributed Phenomena*. In: *10th International Conference on Information Fusion (Fusion 2007)*, Quebec, Canada, Juli 2007.
- [Sim06] SIMON, DAN: *Optimal State Estimation: Kalman, H-Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley & Sons, 1. Auflage, 2006.
- [SS73] SMALLWOOD, RICHARD D. und EDWARD J. SONDIK: *The Optimal Control of Partially Observable Markov Processes Over a Finite Horizon*. *Operations Research*, 21(5):1071–1088, September – Oktober 1973.
- [SV05] SPAAN, MATTHIJS T. J. und NIKOS VLASSIS: *Perseus: Randomized Point-based Value Iteration for POMDPs*. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 24:195–220, August 2005.
- [Thr00] THRUN, SEBASTIAN: *Monte Carlo POMDPs*. In: SOLLA, S.A., T.K. LEEN und K.-R. MÜLLER (Herausgeber): *Advances in Neural Information Processing Systems 12*, Seiten 1064–1070. MIT Press, Cambridge, MA, 2000.
- [Whi69] WHITTLE, PETER: *A View of Stochastic Control Theory*. *Journal of the Royal Statistical Society*, 132:320–334, 1969.
- [Zay93] ZAYED, AHMED I.: *Advances in Shannon's Sampling Theory*. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [ZSR02] ZHAO, FENG, JAEWON SHIN und JAMES REICH: *Information-Driven Dynamic Sensor Collaboration*. *IEEE Signal Processing Magazine*, 19(2):61–72, März 2002.

Im Rahmen dieser Arbeit entstandene eigene Veröffentlichungen

- [1] DEISENROTH, MARC P., TOSHIYUKI OHTSUKA, FLORIAN WEISSEL, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Finite-Horizon Optimal State-Feedback Control of Nonlinear Stochastic Systems Based on a Minimum Principle*. In: *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2006)*, Seiten 371–376, Heidelberg, Germany, September 2006.
- [2] DEISENROTH, MARC P., FLORIAN WEISSEL, TOSHIYUKI OHTSUKA und UWE D. HANEBECK: *Online-Computation Approach to Optimal Control of Noise-Affected Nonlinear Systems with Continuous State and Control Spaces*. In: *Proceedings of the European Control Conference (ECC 2007)*, Seiten 3664–3671, Kos, Greece, Juli 2007.
- [3] WEISSEL, FLORIAN und UWE D. HANEBECK: *A Test-Environment for Control Schemes in the Field of Collaborative Robots and Swarm Intelligence*. In: *Proceedings of the 7th International Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT 2005)*, Band 1, Ufa, Russian Federation, September 2005.
- [4] WEISSEL, FLORIAN, MARCO F. HUBER, DIETRICH BRUNN und UWE D. HANEBECK: *Stochastic Optimal Control based on Value-Function Approximation using Sinc Interpolation*. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress (IFAC 2008)*, Seoul, Korea, Juli 2008.
- [5] WEISSEL, FLORIAN, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *A Closed-Form Model Predictive Control Framework for Nonlinear Noise-Corrupted Systems*. In: *Proceedings of the 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2007)*, Band SPSMC, Seiten 62–69, Angers, France, Mai 2007.
- [6] WEISSEL, FLORIAN, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *A Nonlinear Model Predictive Control Framework Approximating Noise Corrupted Systems with Hybrid Transition Densities*. In: *Proceedings of the 2007 IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2007)*, Seiten 3661–3666, New Orleans, Louisiana, Dezember 2007.
- [7] WEISSEL, FLORIAN, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *Efficient Control of Nonlinear Noise-Corrupted Systems Using a Novel Model Predictive Control Framework*.

- In: *Proceedings of the 2007 American Control Conference (ACC 2007)*, Seiten 3751–3756, New York, New York, Juli 2007.
- [8] WEISSEL, FLORIAN, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *Test-Environment based on a Team of Miniature Walking Robots for Evaluation of Collaborative Control Methods*. In: *Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2007)*, Seiten 2474–2479, San Diego, California, November 2007.
- [9] WEISSEL, FLORIAN, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *Stochastic Nonlinear Model Predictive Control based on Gaussian Mixture Approximations*. In: *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Springer, 2009.
- [10] WEISSEL, FLORIAN, THOMAS SCHREITER, MARCO F. HUBER und UWE D. HANEBECK: *Stochastic Model Predictive Control of Time-Variant Nonlinear Systems with Imperfect State Information*. In: *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Multi-sensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI 2008)*, Seoul, Korea, August 2008.

In dieser Arbeit werden neuartige Verfahren zur Regelung nichtlinearer Systeme unter umfassender Berücksichtigung stochastischer Unsicherheiten vorgestellt. Zur Stellwertbestimmung werden Techniken der modell-prädiktiven Regelung (MPC) verwendet. Hierbei wird das Systemverhalten stellgrößenabhängig innerhalb eines endlichen Horizontes prädiziert und mittels einer Gütefunktion bewertet. Im Falle nichtlinearer Systeme sowie nichtquadratischer Gütefunktionen hat sowohl das Systemrauschen als auch die Zugänglichkeit der Zustandsgrößen einen erheblichen Einfluss auf die Wahl der optimalen Stellwerte. Das in dieser Arbeit vorgestellte Framework zur stochastischen nichtlinearen modell-prädiktiven Regelung (SNMPC) berücksichtigt daher sowohl explizit den Einfluss des Systemrauschens als auch die Zugänglichkeit der Zustandsgrößen. Die sich ergebenden nichtkonvexen stochastischen Optimierungsprobleme sind im Allgemeinen nicht geschlossen lösbar. Um dennoch einen praktikablen Einsatz zu ermöglichen, stellt das Framework verschiedene Verfahren zur approximativen Lösung bereit. Hierzu werden Verfahren zur nichtlinearen stochastischen Zustandsschätzung mittels Approximation der Systemtransitionsdichte mit speziellen, auf verschiedenen Funktionsklassen beruhenden Modellierungen der Gütemaße kombiniert, was eine analytische Berechnung ermöglicht. Die vorgestellten SNMPC-Verfahren werden anhand der Regelung miniaturisierter Laufroboter evaluiert.